Казахский национальный университет имени аль-Фараби

УДК 624.04.62 На правах рукописи

**ХАБИДОЛДА ОМИРХАН**

# Исследование напряженно-деформированного состояния и оценка прочности элементов строительных конструкций с учетом трещиноподобных дефектов

6D060300 - Механика

Диссертация на соискание степени
доктора философии (PhD)

Отечественный научный консультант:
д.т.н, профессор Нугужинов Ж.С.

Зарубежный научный консультант:
д.т.н, профессор Ватин Н.И.
(Санкт-Петербургский политехнический
университет Петра Великого, Россия)

Республика Казахстан
Алматы, 2020

**СОДЕРЖАНИЕ**

ОБАЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ ..... 4
ВВЕДЕНИЕ ..... 6
1 СОСТОЯНИЕ ИЗУЧЕННОСТИ ПРОБЛЕМЫ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ ..... 11
1.1 Обзор работ по расчету тел с трещиноподобными дефектами ..... 11
1.2. Анализ методов расчета железобетонных конструкций ..... 21
1.3. Конечно-элементный анализ напряженно–деформированного ..... 27
1.4. Планирование компьютерных экспериментов и методика ..... 31
1.5. Постановка задач исследования ..... 35
2 ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ИЗГИБАЕМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ТРЕЩИНАМИ ..... 38
2.1 Определение предварительных напряжений в железобетонных балках ..... 38
2.1.1 О предварительных напряжениях ..... 38
2.1.2 Линейный расчет предварительно напряженных балок ..... 40
2.1.3 Нелинейный расчет предварительно напряженных балок ..... 45
2.1.4 Определение предварительных напряжений с помощью ПК ЛИРА ..... 53
2.1.5 Регрессионные зависимости для предварительных напряжений ..... 57
2.2 Определение предельных нагрузок для изгибаемых железобетонных элементов ..... 64
2.2.1 Определение предельного момента по образованию трещины ..... 64
2.2.2 Определение предельного момента по несущей способности ..... 67
2.3 Определение напряженно-деформированного состояния железобетонных элементов с трещинами ..... 71
2.3.1 Современные аналитические методы расчета ..... 72
2.3.2 Аналитический метод расчета с определением длины трещины ..... 76
2.3.3 Применение численных методов ..... 83
2.4. Регрессионные зависимости для параметров напряженного состояния при изгибе ..... 88
2.5 Численный расчет напряженного состояния сечения с трещиной при внецентренном сжатии ..... 95
2.6 Выводы по II главе ..... 101
3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ В ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИЙ С ТРЕЩИНАМИ ..... 103
3.1 Применение МКЭ в механике разрушения ..... 103
3.2 Численный расчет параметров механики разрушения ..... 107
3.3 Определение параметров механики разрушения в элементах металлоконструкций ..... 113
3.4 Определение коэффициента интенсивности напряжений в изгибаемых железобетонных элементах ..... 120
3.4.1 Определение КИН в линейной постановке ..... 120
3.4.2 Определение КИН в нелинейной постановке ..... 126

3.5 Определение регрессионных зависимостей для коэффициента интенсивности напряжений ..... 136
3.6 Выводы по III главе ..... 140
4 ОЦЕНКА ТРЕЩИНОСТОЙКОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ..... 141
4.1 Критериальные соотношения механики разрушения ..... 141
4.1.1 Однопараметрические критерии разрушения ..... 141
Коэффициент интенсивности напряжений. ..... 141
4.1.2 Двухпараметрические критерии разрушения ..... 151
4.2 Определение предельных значений параметров механики разрушения .... 157
4.3 Оценка прочности элементов металлоконструкций с трещинами ..... 164
4.4 Выводы по IV главе ..... 174
5 РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РАСЧЕТУ И ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ТРЕЩИНОПОДОБНЫМИ ДЕФЕКТАМИ ..... 175
5.1 Рекомендации по расчету изгибаемых железобетонных ..... 175
5.2 Примеры расчета элементов конструкций с трещинами ..... 177
ЗАКЛЮЧЕНИЕ ..... 187
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ ..... 189

# ОБАЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

| | | |
|---|---|---|
| $K_{IC}$ | – | вязкость разрушения |
| $J_{IC}$ | – | вязкость упругопластического разрушения |
| $\delta_c$ | – | критическое раскрытие при вершине трещины |
| $\mu$ | – | коэффициент армирования |
| $A_s$, $A'_s$; $A_{sp}$, $A'_{sp}$ | – | площади ненапрягаемой и напрягаемой арматуры в растянутой и сжатой зоне |
| $R_s$ | – | расчетное сопротивление в арматуре |
| $R_{sn}$ | – | нормативное сопротивление арматуры |
| $R_{bt}$ | – | предела прочности |
| $E_s$, $\sigma_s$ | – | модуль упругости и напряжение в арматуре в сечении с трещиной |
| $M_m$ | – | момент образованием трещины |
| $l_m$ | – | длина трещин |
| $h_m$ | – | шаг трещин |
| $\psi_s$ | – | коэффициент неравномерности деформации арматуры |
| $\phi_l$ | – | коэффициент, учитывающий длительность действия нагрузки |
| $\eta$ | – | коэффициент, учитывающий вид арматуры |
| $\delta$ | – | коэффициент, зависящий от вида деформаций |
| $\{\sigma\}, \{\varepsilon\}$ | – | векторы-столбцы напряжений и деформаций |
| $V$ | – | объем тела |
| $S$ | – | граница тела |
| $\{f\}$ | – | вектор-столбец перемещений тела |
| $\{p\}$ | – | распределенные массовые силы |
| $\{g\}$ | – | распределенная внешняя нагрузка |
| $[N]^{(e)}$ | – | матрица-строка, элементы которой называются функциями формы конечного элемента |
| $\{\delta\}^{(e)}$ | – | вектор узловых неизвестных конечного элемента |
| $\{\delta\}, \{R\}$ | – | вектор узловых перемещений и нагрузки для всей системы |
| $\sigma_{sp}$, $\sigma'_{sp}$ | – | предварительного напряжения в арматуре |
| $\varepsilon_{sl}$ | – | свободная усадка бетона |
| $\nu_t$ | – | коэффициент упругопластической деформации бетона |
| $A_i$ | – | площадь $i$-й части сечения |
| $I_i$ | – | момент инерции $i$-й части сечения относительно собственной центральной оси |
| $e_{op}$ | – | эксцентриситет силы обжатия относительно центра тяжести приведенного сечения |
| $A_{ct}$, $A_c$ | – | площадь свесов полок в растянутой и сжатой зоне |

| | | |
|---|---|---|
| $h_t$, $h_c$ | – | толщина полок в растянутой и сжатой зоне |
| $a$, $a'$ | – | толщина защитного слоя бетона в растянутой и сжатой зоне |
| $A_s$, $A'_s$ | – | площадь арматуры в растянутой и сжатой зоне |
| $N_a$, $N'_a$ | – | внутренние усилия в арматуре в растянутой и сжатой зоне |
| $\sigma_t, \sigma_b$ | – | максимальные растягивающие и сжимающие напряжения |
| $\varepsilon_t$, $\varepsilon_b$ | – | максимальные растягивающие и сжимающие деформации |
| $W_{pe}$ | – | упругопластический момент сопротивления предварительно напряженного сечения |
| $\tau_c$ | | максимальное напряжение сцепления арматуры с бетоном |
| $\omega$ | – | коэффициент полноты эпюры сцепления |
| $\varepsilon_{rb}$ | – | деформация бетона соответствующая максимальному напряжению |
| $\varepsilon_{b,s}$, $\sigma_{b,s}$ | | деформация и напряжение в бетоне на уровне центра арматуры |
| $E_s$ | – | секущего модуля |
| $z_0$ | – | высоты сжатой зоны |
| ЛМР | – | линейной механики разрушения |
| МКЭ | – | метод конечных элементов |
| НДС | – | напряженно-деформированного состояния |
| МДТТ | – | механика деформированного твердого тела |
| КИН | – | коэффициент интенсивного напряжения |
| СНиП 2.03.01-84* | – | Бетонные и железобетонные конструкции |
| СНиП РК 5.03-34-2005 | – | Бетонные и железобетонные конструкции. Общие положения |

# ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.** Вхождение Казахстана в число тридцати наиболее конкурентоспособных и динамично развивающихся стран мира требует интенсивного развития строительной отрасли. Эта задача приобрела статус общегосударственной программы. Географические условия расположения Казахстана способствуют достижению поставленной цели путем интенсивного строительства многофункциональных, уникальных объектов, транспортных коммуникаций, новых промышленных предприятий, работающих на основе инновационных технологий, индустриализации страны и освобождения экономики от сырьевой зависимости.

Решение этих задач связано с увеличением объема строительных работ, следовательно, увеличением использования металлических, бетонных и железобетонных конструкций. Оптимальное проектирование, эффективная эксплуатация, реальная оценка технического состояния и остаточного ресурса объектов строительства тесно связаны с совершенствованием методов расчета строительных конструкций.

С развитием дефектоскопии установлено, что в строительных конструкциях содержится множество микроскопических дефектов, которые в процессе работы могут превратиться в трещины. Эти дефекты могли иметь естественное происхождение или появиться в процессе изготовления, например, из-за усадки бетона, из-за предварительного напряжения арматуры, из-за непровара сварных швов. Однако многие из них возникают в процессе транспортировки, монтажа и эксплуатации конструкций. При появлений трещины происходит перераспределение напряжений в поперечном сечении, что существенно влияет на оценку прочности конструкций. Кроме того, раскрытие берегов трещины приводит к коррозии арматуры и снижает ее долговечность.

Появление в элементах конструкций трещин еще не означает исчерпания его несущей способности. В зависимости от режимов и условий эксплуатации, размера и характера трещины они получают устойчивое или неустойчивое развитие, а могут не развиваться вовсе. При неустойчивом развитии трещин может произойти разрушение конструкций, а при устойчивом развитии тела с трещинами могут надежно функционировать еще значительное время. Поскольку бездефектных материалов нет и нет возможности избежать появления новых дефектов в процессе производства, то разработка методов расчета строительных конструкций с трещиноподобными дефектами является актуальной научной проблемой, имеющей важное практическое применение.

Работа выполнена в согласовании с планами НИОКР института КазМИРР при НАО КарТУ (г. Караганда), основанных на научно-технических комплексных исследованиях надежности, долговечности и оценки технического состояния строительных конструкций на основе хоздоговорных научно-исследовательских работ, в соответствии с общегосударственными

программами по совершенствованию и развитию строительной отрасли Казахстана.

**Целью** работы является исследование напряженно-деформированного состояния элементов строительных конструкций с трещиноподобными дефектами и совершенствование на этой основе методики оценки их работоспособности (прочности, трещиностойкости и эксплуатационной пригодности).

В соответствии с поставленной целью были сформулированы следующие **задачи** исследования.

1. Разработать методику нелинейного аналитического расчета напряженного состояния железобетонных элементов при предварительном натяжении арматуры.

2. На основе планируемых многофакторных компьютерных экспериментов и регрессионного анализа создать математическую модель для определения параметров напряженного состояния предварительно напряженных железобетонных элементов прямоугольного сечения.

3. Разработать аналитический метод расчета напряженного состояния изгибаемых железобетонных балок, позволяющий определить и длину трещины и на этой основе усовершенствовать методику определения момента по образованию трещины.

4. На основе планируемых экспериментов и регрессионного анализа создать математическую модель для определения параметров напряженного состояния изгибаемых железобетонных балок прямоугольного сечения с трещинами.

5. Определить параметры механики разрушения в металлических элементах конструкций с трещинами с предоставлением результатов в виде регрессионной зависимости.

6. Определить коэффициент интенсивности напряжений в изгибаемых железобетонных элементах с трещинами.

7. Разработать методику оценки прочности и эксплуатационной пригодности элементов строительных конструкций с трещиноподобными дефектами.

**Научная новизна** диссертационной работы заключается:

- в разработке методики аналитического расчета напряженного состояния железобетонных элементов при предварительном натяжении арматуры в нелинейной постановке;
- в разработке аналитического метода расчета напряженного состояния изгибаемых железобетонных балок с трещинами и усовершенствовании методики определения момента по образованию трещины;
- в создании адекватной математической модели для определения предварительных напряжений, параметров напряженного состояния изгибаемых железобетонных элементов прямоугольного сечения, в том числе длины и ширины раскрытия трещины;

- в создании расчетной модели и определении КИН в изгибаемых железобетонных элементах;
- в определении регрессионных зависимостей для КИН в элементах металлических конструкций;
- в совершенствовании методики оценки прочности и эксплуатационной пригодности строительных конструкций с трещинами.

**Практическая ценность результатов**.

1. Разработанная методика аналитического расчета и полученные регрессионные зависимости для определения напряжений от предварительного натяжения арматуры позволяют оценить реальное техническое состояние железобетонных элементов конструкций. Эти результаты также позволяют обоснованно выбрать предельное натяжение арматуры при изготовлении предварительно напряженных элементов.
2. Разработанный аналитический метод и полученные регрессионные зависимости для определения параметров напряженного состояния изгибаемых железобетонных балок с трещинами позволяют оценить прочность и эксплуатационную пригодность этих элементов конструкций.
3. Созданная расчетная модель дает возможность аналитически определить параметры механики разрушения в изгибаемых железобетонных балках с трещинами.
4. Полученные в работе регрессионные зависимости для КИН дают возможность оценить трещиностойкость конструкций без применения программных комплексов.
5. Разработана инженерная методика оценки прочности и эксплуатационной пригодности строительных конструкций с трещиноподобными дефектами.

**Научные положения и результаты**, выносимые на защиту:

- методика аналитического расчета и регрессионные зависимости для определения напряжений в железобетонных элементах от предварительного натяжения арматуры;
- аналитический метод для определения параметров напряженного состояния изгибаемых железобетонных балок с трещинами и методика определения момента по образованию трещины;
- регрессионные зависимости для параметров напряженного состояния и трещинообразования прямоугольных железобетонных балок при изгибе;
- аналитические выражения для определения КИН в элементах строительных конструкций;
- методика оценки прочности тел с трещиноподобными дефектами с учетом критериев механики разрушения.

**Обоснованность и достоверность** научных положений и выводов подтверждается корректной постановкой всех решаемых задач, применением современных методов механики деформируемого твердого тела, прикладного математического анализа, отображением результатов при помощи строгих логических математических выкладок, моделированием на ЭВМ, непротиворечивостью и правдоподобностью полученных результатов и

сравнением их для частных случаев с результатами других авторов с решениями тестовых задач.

**Результаты работы** внедрены в учебный процесс КарГТУ и используются при проведении занятий, в курсовом и дипломном проектировании при подготовке бакалавров и магистров по строительным специалистам. Они внедрены также в институте КазМИРР и используются на различных строительных и промышленных объектах при выполнении научно-исследовательских хоздоговорных работ.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих мероприятиях:

– VII Международный симпозиум «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений (APCSCE 2018)»: (Новосибирск, Россия, 1-8 июля 2018 г.);

– Международная IX научно-практическая конференция «Обследование зданий и сооружений: проблемы и пути их решения» (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Россия, 11-12 октября 2018);

– Международная конференция «Интеграция науки, образования и производства-основа реализации Плана нации», (Сагиновские чтения, КарГТУ, Караганда, 14-15 июня 2019 г.);

– Международная научная конференция «Теоретические и прикладные вопросы математики, механики и информатики» (КарГУ, Караганда, 12-13 июня 2019 г.);

– 2nd International Conference on Civil Engineering and Architecture, ICCEA 2019 (Seoul, South Korea, 21-23 September, 2019).

– научные семинары механико-математического факультета КазНУ им. аль-Фараби (2016-2019 гг., Алматы);

– научные семинары кафедры механики КазНУ им. аль-Фараби (2016-2019 гг., Алматы).

**Публикации.**

По теме диссертации автором было опубликовано 10 работ, в том числе 3 публикации в научных изданиях, входящих в перечень рекомендованных Комитетом по контролю в сфере образования и науки МОН РК для публикации основных результатов научной деятельности; 5 публикаций в научных журналах и трудах международных конференций, индексируемых базой данных Scopus, среди которых 1 публикация с ненулевым импакт-фактором (CiteScore - 79-процентиль, Q2); 2 публикации в трудах отечественных международных научных конференций.

**Личный вклад автора.**

Основные результаты исследований, изложенные в диссертационной работе, получены автором самостоятельно с учетом анализа имеющихся на данный момент научных работ в исследуемой области механики деформируемого твердого тела.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из титульного листа, содержания, обозначений и сокращений, введения, четырех

разделов и рекомендации по использованию результатов, заключения, списка использованных источников из 214 позиций. Общий объем диссертации составляет 190 страниц, включая 38 иллюстрации и 25 таблицу.

# 1 СОСТОЯНИЕ ИЗУЧЕННОСТИ ПРОБЛЕМЫ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ

## 1.1 Обзор работ по расчету тел с трещиноподобными дефектами

Одним из важных задач в области строительства является дальнейшее повышение надежности и долговечности строительных конструкций. Наиболее часто встречающимся фактором, снижающим эти качества, является наличие в них трещин или трещиноподобных дефектов различного происхождения. Такие дефекты неизбежно возникают как на стадии изготовления материалов и изделий, так и на стадии эксплуатации под действием нагрузок или внешней среды. Причинами появления трещин может быть чрезмерное натяжение арматуры в предварительно напряженных конструкциях, недостаточный защитный слой бетона, усадка бетона, несплошности, воздействие высокой температуры при сварке узлов сопрягаемых элементов. В несущих железобетонных конструкциях возникновение и развитие трещин происходит вследствие их деформаций от воздействия нагрузок, температурных колебаний, коррозии, неравномерной осадки зданий и сооружений.

Под действием нагрузок происходит постепенное развитие дефектов, объединение их в трещины, которые со временем могут привести к исчерпанию несущей способности конструкций. Исследование закономерностей зарождения и развития трещин составляет предмет современного, быстро развивающего раздела механики деформируемого твердого тела - механики разрушения.

Под действием нагрузки существующая трещина может развиваться и не развиваться. По характеру развития процесса разрушения различают устойчивое продвижение трещин, которое происходит постепенно по мере увеличения нагрузок или продолжительности их воздействия, и их неустойчивый рост, не связанный с ростом нагрузок и обычно приводящий к мгновенному разрушению.

Основы линейной механики разрушения (ЛМР) упругих тел с позиции общего энергетического баланса изложены Гриффитсом в 1921 г. Затем Снеддон в 1946 г. нашел распределение напряжений у вершины трещины в упругом теле. Большую роль в развитии механики разрушения сыграла концепция квазихрупкого разрушения, введенная Ирвином и Орованом. Она позволила использовать положения механики хрупкого разрушения и для случаев маломасштабной текучести. Чуть позже Ирвин, основываясь на решении Снеддона, ввел важный параметр ЛМР – коэффициент интенсивности напряжений (КИН). На основе КИН им сформулирован силовой критерий разрушения и показана его эквивалентность энергетическому критерию Гриффитса.

Дальнейшее развитие механика разрушения получила в трудах зарубежных исследователей П. Пэриса, Дж. Си, А. Уэллса, Дж. Сроули, У. Брауна, Ф. Макклинтока, Г. Любовица, Дж. Райса, Ф. Эрдогана и советских ученных Л.И. Седова [1], В.В. Новожилова, Г.П. Черепанова [2], М.Я. Леонова, В.В. Панасюка [3], В.З. Партона [4, 5], Е.М. Морозова, Г.П. Никишкова [6] и др.

Подробное изложение основ механики разрушения имеется в работах [7-10], большой справочный материал собран в пособиях [11-14]. Очерки о развитии механики разрушения и обзор работ, опубликованных до 1975 года можно найти в работах [2, 8]. Современное состояние и перспективы развития механики разрушения изложены в работах [15-20].

Решение задач механики разрушения состоит из следующих последовательно выполняемых этапов: определение напряженно-деформированного состояния (НДС) тела с трещиной, расчет параметров механики разрушения, выбор критерия разрушения, определение критериальных параметров материалов, оценка прочности. По механике разрушения публикуется очень много работ, их обзор выполним в вышеизложенной последовательности.

Определение НДС тел с трещинами производится аналитическими и численными методами. Аналитические методы изложены в работах [21-24]. Большинство аналитических решений получено для двумерных задач [23]. Для этих задач наиболее часто применяется метод комплексных потенциалов Колосова – Мусхелишвили и его частный случай функция Вестергарда. Для ограниченной односвязной области с краевой трещиной применяется метод конформных отображений [3], а для внутренних трещин – метод граничных коллокаций. Некоторые двумерные и трехмерные задачи механики разрушения могут быть решены с помощью интегральных преобразований [5]. При использовании функции Грина эти задачи сводятся к сингулярным интегральным уравнениям [22, 24], позволяющим рассматривать общий случай конфигурации трещин и формы тела. В случае областей, ограниченных несколькими контурами используется метод последовательных приближений (алгоритм Шварца). Аналитические решения некоторых трехмерных задач приведены в работах [5, 12; 24-27].

Решение задач механики разрушения в нелинейной постановке подробно рассмотрены в монографиях [15, 16]

В силу сложности задач механики разрушения, сложности формы тел с трещинами замкнутые аналитические решения получены только для частных задач, в основном плоских. В связи с этим для решения задач механики разрушения в основном используются численные методы. Среди них наибольшее применение имеет метод конечных элементов.

Как отмечено в многих обзорах диссертаций и статей в разработке теории и применении МКЭ для решения задач МДТТ можно отметить значительный вклад зарубежных ученых М.Р. Айронс, Дж. Аргирис, О.К. Зенкевич, Е.Л. Вильсон, Л. Сегерлинд и др. Немалый вклад в развитие МКЭ имеется в работах советских ученых А.В. Александрова, В.Г. Корнеева, В.А. Постнова, Л.А. Розина, Н.Н. Шапошникова и др. Основы МКЭ подробно изложены в работах [28-30]. Имеется большая библиотека универсальных и специальных конечных элементов, созданы эффективные алгоритмы и универсальные программные комплексы (ANSYS, NASTRAN, DINA, LIRA и т.д). Однако для решения задач механики разрушения МКЭ необходимо модифицировать так, чтобы учесть

особенность решения в вершине трещины. Вычислительные аспекты применения МКЭ к решению задач механики разрушения изложены в следующих работах [6, 18, 20, 22, 25].

Определению НДС в теле с трещинами посвящено много научных статей, в том числе в последнее время [31-36].

Рассмотренные выше аналитические методы касались решения задач в упругой постановке, то есть задач линейной механики разрушения (ЛМР). Методы ЛМР применимы для случаев, когда разрушение можно считать хрупким. В этом случае напряженное состояние при вершине трещины оценивается КИН. В развитии ЛМР и в исследованиях распространения усталостных трещин КИН сыграл фундаментальную роль [37, 38]. Методика определения КИН аналитическими и численными методами изложена в работах [2-6, 11, 12, 22, 25, 39].

Для определения КИН МКЭ используются различные подходы. Прямые методы вычисления КИН [2, 4, 20, 22] предполагают использование напряжений и перемещений у вершины трещины в разных точках с экстраполяцией на вершину трещины. При этом использование перемещений дает более точные результаты [20, 22]. Энергетические методы определения КИН используют связь между интенсивностью освобождения энергии и КИН и реализуется в виде метода податливости [6, 22] или метода виртуального роста трещины [4, 40]. Для вычисления КИН можно использовать введенный Г.П. Черепановым [2] и Дж. Райсом [8, т.1] не зависящий от контура интегрирования J – интеграл. Для упругого тела он равен интенсивности освобождения энергии и легко выражается через КИН [7, 22, 41-43]. Определению КИН в двумерных задачах посвящено много научных статей [44-53], однако решенных трехмерных задач совсем немного [26, 54-56].

При разрушении металлических конструкций у вершины трещины всегда образуется пластическая зона. Поэтому необходимо иметь правильное представление о форме и размерах пластической зоны. Рост размеров пластической зоны приводит к необходимости замены линейной механики разрушения на нелинейную, что сказывается и на формулировке критериев разрушения. Распространение результатов ЛМР на случай квазихрупкого разрушения (маломасштабной текучести) производится путем применения поправки Ирвина, использованием различных моделей: Дагдейла, Барелблатта, Леонова – Панасюка. Эти подходы подробно изложены во многих монографиях, например [7, 57].

Другим предельным случаем является разрушение при развитом пластическом течении. Для решения упругопластических задач механики разрушения в этом случае применяется теория жесткопластичности. В общем случае решение упругопластических задач должно осуществляться с применением теории пластичности. Наибольшее применение находят деформационная теория и теория течения [6]. Аналитических решений упругопластических задач практически нет. В работе [58] для определения НДС у вершины трещины предлагается использовать решение Нейбера для

упругопластических задач. Упругопластические задачи механики разрушения в основном решаются МКЭ с применением итерационных процедур [6, 20, 25, 28, 32, 59, 60].

Образование новой поверхности (разрушение) характеризуется интенсивностью высвобождения энергии G. Эта энергия косвенно связана с энергетическим J – интегралом, который равен энергии, приходящемуся на единицу площади у вершины трещины. Поэтому он мало связан с видом разрушения материала и может характеризовать условие разрушения в линейной и нелинейной механике. Методика определения J – интеграла и ссылки на ранние работы в этом направлении имеются в работах [8, 22, 23, 25, 61].

Большинство аналитических выражений для определения J – интеграла вытекает из решения задачи определения концентрации деформации в вершине трещины, основанном на решении Хатчинсона – Райса – Розенгрина (HRR - решении) [22] и развитом в работах Макклинтока. Однако, полученные выражения носят частный характер и не имеют инженерного приложения. Энергетическая трактовка J – интеграла [6, 25] позволяет строить различные эффективные численные алгоритмы для определения этого параметра МКЭ. Так в работе [22] отмечается три основных способа: определение J – интеграла путем численного интегрирования по выбранному контуру; метод Бигли и Лэндеса, основанный на моделировании диаграммы нагрузка – перемещение; применение зависимости Райса [8, т.1] или Меркла – Кортена. Определению J – интеграла уделяется большое внимание учеными по настоящее время, о чем свидетельствуют многочисленные публикации в научных журналах, например [42, 62-64].

Одной из первых попыток получить количественную характеристику при упругопластическом деформировании тела с трещиной было нахождение раскрытия трещины у вершины, предложенное М.Я. Леоновым, В.В. Панасюком [3] и Уэллсом [8, т.4]. Однако, вычислительные проблемы, связанные с этим критерием, трудности его экспериментального определения, неприменимость критерия для упругих решений ограничивают применение этого критерия. Хотя работы по снятию этих проблем продолжаются, мы не будем проводить обзор этих работ.

Параметры механики разрушения можно определять и экспериментально, чаще всего методом фотоупругости. Эти вопросы освещены в работе [7, 65] и статьях [62-68].

Критерии механики разрушения дают информацию о наступлении критического состояния тела, для которого определяются либо критические размеры трещины при известной нагрузке, либо несущая способность изделия при заданных размерах трещины. Наиболее часто используются критерии, основанные на КИН, J – интеграле, пределе трещиностойкости. Обоснование и запись этих критериальных соотношений дано в книгах [3, 4, 7-9, 22, 57]. Формулировка однопараметрических критериев не вызывает затруднений, так как все они основаны на том, что разрушение наступает тогда, когда

рассматриваемый параметр механики разрушения достигает предельного значения ($K_C$, $J_C$, $I_C$), характерного для данного материала.

Основным критерием ЛМР (хрупкого разрушения) является КИН, предложенный еще Ирвином. Методика вычисления КИН при одновременной работе трещин на отрыв, сдвиг и срез имеется в работе [12, 69]. Развитию силового критерия посвящены работы [70-72].

Критерии нелинейной механики разрушения не совсем очевидны, поэтому предложено множество критериальных соотношений. Однопараметрические критерии обычно выражены через J – интеграл [22, 57, 73], реже через критерии раскрытия трещины [22]. В случае больших местных упругопластических деформаций применяется деформационный критерий [58, 75, 76]. Проблемы развития энергетического критерия рассмотрены в работах [77, 78].

При разрушении металлических конструкций возникает смешанное разрушение, которое можно описать с помощью двухпараметрических критериев. Из них наиболее распространены критериальные соотношения, выраженные через КИН или параметр трещиностойкости [4, 79-81]. Исследования по совершенствованию этого подхода продолжаются [82, 83]. Однако эти соотношения дают заметные погрешности при больших пластических деформациях. В этих условиях следует применять двухпараметрические критерии, выраженные через J - интеграл [79, 84-86] или интенсивность деформации [58, 84].

В работе [84] показано, что критериальные параметры между собой взаимосвязаны. Это объясняется тем, что все они базируются на условиях пластического течения через единую диаграмму деформирования материала и отражают способность материала пластически деформироваться в локальных объемах. Поэтому эти критерии связаны между собой через параметры диаграммы деформирования. Очевидно, возможна связь между параметрами нелинейной механики разрушения в упругопластической области и КИН. Наличие такой связи существенно расширяет круг прикладных задач, решаемых методами ЛМР.

Обобщение современных моделей и критериев механики разрушения приведены в монографии Матвиенко Ю.Г [17].

Эффекты нелинейного деформирования материала у вершины трещины приводят к тому, что трещина, начав распространяться, требует для своего развития монотонного увеличения приложенной нагрузки. Такой устойчивый рост трещины происходит до тех пор, пока не станет удовлетворяться соответствующий критерий неустойчивости. Критерии перехода от устойчивого развития к неустойчивому росту трещины оперируют производной от J – интеграла по длине трещины и приведены в работах [7, 22, 39, 57, 84]. Исследования в этом направлении продолжаются и ныне [87-89].

Применение критериев разрушения предполагает необходимость определения характеристик сопротивления материалов разрушению: $K_{IC}$ – вязкость разрушения, $J_{IC}$ – вязкость упругопластического разрушения, $\delta_c$ - критическое раскрытие при вершине трещины. В настоящее время накоплены

значительные экспериментальные данные по их величинам [12-14, 65], существуют общепринятые стандарты и методики [7, 22, 90].

В настоящее время можно выделить условно три группы методов определения $K_{1C}$:

- методы, основанные на корреляции трещиностойкости с другими параметрами, измеряемыми более простыми приемами [91];
- прямые методы измерения необратимой работы по площади петли гистерезиса;
- методы, основанные на решении конкретных задач механики разрушения.

Определение параметров $K_C$, $J_C$ у нас регламентируется ГОСТОМ 25.506-85 [90]. Стандарты по определению критических значений параметров механики разрушения существуют и в дальнем зарубежье. В США для определения $K_{1C}$ существует руководство Американского общества испытания материалов ASTM – E399 [7, 22]. Эти испытания проводятся на трехточечный изгиб или растяжение в условиях плоской деформации. При этом накладываются требования на размеры образца и трещины. Испытания при плоском напряженном состоянии (ПНС) не стандартизовано, однако они проводятся в силу их необходимости по методике Феддерсена [92]. Есть методика испытания ASTM по определению R – кривых, необходимых для оценки устойчивого роста трещины [93]. Испытания по определению $J_C$ проводятся согласно руководству ASTM – E 24 [22]. Эти испытания имеют некоторые преимущества: нет необходимости вводить строгие требования на размеры образца; по $J_C$ легко определить $K_{1C}$; ими можно пользоваться при оценке начала устойчивого роста трещины. Аналогичные стандарты существуют в Англии (предложения BSI) и Японии (проект WES).

Испытания по определению предельных параметров механики разрушения постоянно совершенствуются, о чем можно судить по опубликованным статьям [68, 69, 94, 95].

Для обеспечения работоспособности тел с трещинами необходимо иметь инженерную методику расчета на прочность. Расчет на трещиностойкость, дополняющий обычный расчет на прочность, призван способствовать мерам по защите конструкций от преждевременного разрушения и устанавливать допуск на безопасные размеры трещиноподобных дефектов. Эти вопросы отражены в ряде монографий [8, 9, 96, 97] и во многих научных статьях [79-81, 98-105]. Однако, большинство журнальных статей носят частный характер и рассматривают особенности разрушения конкретных конструкций. Кроме того, современная концепция “соответствие назначению” требует обоснованного выбора критериев разрушения и назначения коэффициентов запаса на длину трещины, разработки алгоритма определения искомых параметров (критической длины трещины, разрушающей нагрузки) из критериальных соотношений. Выбор критерия разрушения зависит от материала изделия и используемого параметра механики разрушения. Обоснованный выбор

коэффициента запаса на длину трещины является непростым и очень важным в практическом плане. Этот вопрос рассматривался в работах [4, 98, 99].

С оценкой прочности по критериям механики разрушения тесно связан вопрос определения пути развития трещины, который нередко рассматривается в научных публикациях [106, 107].

Трещиноподобные дефекты часто встречаются в сварных соединениях, трубопроводах и сосудах высокого давления. Расчету этих конструкций уделено очень много внимания в публикациях. В них имеются полезные примеры применения методов механики разрушения к расчету конструкций. Расчету сварных соединений с трещиноподобными дефектами посвящены следующие работы [97, 101, 108-111].

В качестве перспективы отметим, что начальные размеры трещины, их ориентация, а порой механические характеристики материалов и действующие нагрузки часто являются случайными величинами. Для оценки надежности и долговечности элементов конструкции в этих случаях требуется применение аппарата математической статистики и теории вероятностей. В связи с этим в настоящее время формулируется и развивается новое направление теоретических и экспериментальных исследований, как вероятностная механика разрушения. В ряде работ [37, 38, 75, 112, 113] предложены методы и модели вероятностной аппроксимации закономерностей развития усталостных трещин. Но для их применения нужен большой обьем статистических данных и экспериментального материала. Это трудно достижимо и очень дорого. Внедрение в расчетную практику методов имитационного моделирования открывает широкие возможности для внедрения вероятностной механики разрушения. Количество работ в этом направлении в последние годы быстро растет [114-118].

Вместе с тем отметим, что внедрение вероятностных методов не снимает необходимости детерминированных расчетов, наоборот оно предполагает наличие аналитической зависимости выходных параметров от случайных аргументов. Это позволяет определить закон распределения критериального параметра механики разрушения путем преобразования плотностей вероятностей случайных аргументов. Определение надежности конструкций теперь сводится к определению вероятности нахождения критериального параметра в допустимых границах. При этом допустимые границы в виде критической длины трещины или разрушающей нагрузки определяется опять же на основе детерминированного подхода.

Трещины являются наиболее распространенным видом дефектов и повреждений железобетонных конструкций. Само появление трещин в железобетонных элементах не означает исчерпания его несущей способности. Оно приводит к возрастанию усилий в сечениях с трещиной, что снижает прочность элемента. Кроме этого за счет раскрытия трещины возрастает коррозия арматуры, что снижает долговечность конструкции. Нормами регламентируется именно величина раскрытия трещины, которая зависит от напряженного состояния в сечении с трещиной.

Возникновением трещин и их изучением занимались НИИЖБ, ЦНИИСК, в Харьковском ПромстройНИИпроекте и других ведущих научно-исследовательских и проектно-конструкторских организациях. Условиями образования трещин и оценкой их влияния на прочность и деформативность занимались многие ученые, написано множество монографий [119-126] и научных статьей. В них создавались и развивались аналитические и численные методы расчета железобетонных конструкций с трещинами.

Так как трещины существуют в любых железобетонных конструкциях, то определение напряженного состояния в сечении с трещиной очень важно для оценки реального состояния эксплуатируемой конструкции. Расчет железобетонных конструкций с трещинами представляет сложную научную проблему.

Значительный вклад в развитие теории железобетона и методов расчета внесли Гвоздев А.А., Михайлов К.В., Карпенко Н.И., Дмитриев С.А., Крылов С.М., Залесов А.С., Прокопович И.Е., Васильев В.И., Бондаренко В.М., Гуща Ю.П., Мухамедиев Т.А., Голышев А.Б., Яшин А.В. и другие.

Многие аналитические методы определения напряжений в сечений с трещиной получены с использованием гипотезы плоских сечений [127] и введением различных предположений о распределений нормальных напряжений по высоте сечения [120, 123, 125]. Оживленные дискуссии по обоснованию этих положений привели к созданию деформационной модели сечения.

Деформационная модель основана на условиях равновесия, гипотезе плоских сечений, диаграммах состояния материалов и представляет собой шаговый метод последовательных нагружений, на каждом шаге которого могут использоваться различные модификации метода упругих решений. Различные аспекты применения и развития деформационной модели рассмотрены в работах [32, 128-133]. Деформационная модель уже заложена как в зарубежные, так и в отечественные строительные нормы [134-136] и позволила получить универсальный метод, позволяющий производить расчет напряженно-деформированного состояния для произвольной формы поперечного сечения и характера армирования железобетонного элемента для всех видов предельного состояния.

Деформационные модели сечения основаны на использовании криволинейных диаграмм деформирования бетона и арматуры. Известно, что диаграммы имеют большой разброс, на который влияние оказывают многие факторы: прежде всего многокомпонентность применяемых материалов, качество проводимых экспериментов, условия нагружения, свойства применяемых испытательных машин.

Точность расчетов зависела также от точности аппроксимации диаграмм аналитическими выражениями. В этой связи научная литература, посвященная

этому вопросу, довольно обширна: разными авторами предлагались различные математические выражения для их описания [119, 128, 132, 137-140].

При расчетах железобетонных конструкций принято рассматривать полную идеализированную диаграмму с нисходящей ветвью, для которой напряжения в пиковой точке принимают равными нормативному сопротивлению бетона $R_{bn}$ соответствующего класса по прочности при осевом сжатии [141]. Параметрические точки диаграммы деформирования определяют по таблице, содержащейся в нормах в зависимости от класса бетона по прочности.

Переход от нормативной к расчетной диаграмме деформирования, обычно используемой в расчетах, производится путем замены нормативных сопротивлений расчетными.

Для того, чтобы объективно оценить сопротивление железобетонных элементов внешним нагрузкам, необходимо использовать трансформированные (преобразованные) диаграммы состояния бетона, учитывающую влияние различных факторов, поскольку она дает возможность более полного учета параметрических точек.

В статье [142] Карпенко Н.И., Мухамедиев Т.А. и Петров А.Н. предложили трансформировать диаграмму растяжения арматуры в трещине, свободной от сцепления с бетоном, в диаграмму, в которой нормальные напряжения $\sigma$ приняты для сечения с трещиной, а деформации – для сечения, расположенного между трещинами. Вопросам нормирования диаграмм деформирования бетона, определению характерных точек при осевом сжатии посвящено много работ [137, 140, 143-145].

Определение напряженного состояния изгибаемых и внецентренно нагруженных элементов железобетонных конструкций является достаточно трудной задачей и требует применения более сложных моделей. Для этой цели в основном применяется блочная модель А.А. Гвоздева. Расчетная схема таких элементов представляется в виде системы блоков, разделенных трещинами и связанных между собой сжатой зоной и растянутой арматурой. Задача определения напряженного состояния, согласно Е.Н. Пересыпкину, рассматривается как контактная для смежных блоков с удовлетворением граничных условий по длине блока, учитывающих сцепление арматуры с бетоном, и по линии контакта между блоками. Значительный вклад в развитие этой модели внесли Васильев П.И., Мулин И.М., Белов В.И., Пересыпкин Е.Н., Байков В.Н., В.С. Верещагин и др. Дальнейшему развитию блочной модели и автоматизации расчетов по ней посвящена работа Нугужинова Ж.С. [125].

Для расчета элементов железобетонных конструкций по деформационной модели необходимо применение компьютерных технологий и универсальных программ расчета. Этим вопросам посвящены книги, которые постоянно обновляются [146-148].

Особенность механических свойств бетона и железобетона (нелинейность, трещиноватость, неоднородность, особенности сцепления арматуры с бетоном и др.) всегда ставил вопрос о применимости классических теории прочности к расчету железобетонных конструкций. Подробный анализ этого вопроса на основе экспериментальных данных различных исследователей можно найти в работе [149]. Некоторые современные направления развития критериев прочности бетона и моделей расчета железобетонных элементов с трещинами рассмотрены в монографии Н.И. Карпенко [121].

В связи с широким внедрением компьютерных технологий в расчетную практику стал возможным численный расчет параметров механики разрушения и использование их для оценки несущей способности железобетонных конструкций с трещинами. Методы механики разрушения для расчета железобетонных элементов впервые применены в работах Ю.В. Зайцева [126] и других авторов [150, 151]. Нет сомнений в том, что работы в этом перспективном направлений будут продолжены [152-154], особенно с учетом появления новых универсальных программ расчета параметров механики разрушения.

Методы расчета железобетонных конструкций с трещинами в настоящее время продолжают развиваться, о чем свидетельствует большое количество научных статей, появляющихся в последнее время.

Вопросам совершенствования расчетных моделей и определению напряженно-деформированного состояния балок с нормальными к оси трещинами посвящены статьи [155-159]. Одним из основных критериев предельного состояния железобетонных конструкций с трещинами является ширина раскрытия трещины. В этом направлении большой объем теоретических и экспериментальных исследований проведено в НИИЖБ к.т.н. Гуща Ю.П. [160]. Определению этого параметра посвящены статьи [161-168].

Изучению влияния угла наклона трещин на параметры напряженного состояния в сечении посвящены работы [169-171].

Вопросы трещинообразования рассмотрены в работах [172, 173]. Некоторые исследователи считают, что с помощью организованных трещин можно уменьшить прогиб железобетонной балки. Этой идее посвящены работы [174-176].

Вышеуказанным проблемам посвящено множество экспериментальных работ, результаты которых приведены в статьях [161, 163, 174-182]. Много исследований проведены численными методами [157, 159, 166, 167, 176, 183-185].

В последнее время в инженерную практику активно внедряются вероятностные методы расчета. Применению этих методов в прогнозировании параметров трещинообразования и расчет надежности железобетонных

конструкций с трещинами по различным критериям посвящены монографии [186, 187] и ряд научных статей [158, 164, 185, 188-190].

Из этого краткого обзора видно, что публикуется очень много научных статей, посвященных расчету строительных (как металлических, так и железобетонных) конструкций с трещинами, что свидетельствуют об актуальности проблемы.

## 1.2. Анализ методов расчета железобетонных конструкций

Основной базовой моделью для построения нормативных методов расчета стержневых железобетонных элементов является внецентренное сжатие колонны, так как позволяет учесть главные факторы расчета. Расчеты различных конструкций на сжатие и изгиб были основаны на линейной модели распределения напряжений по высоте нормального сечения элемента. При этом рассматривают приведенное бетонное сечение, в котором площадь арматуры $A_s$ заменяется эквивалентной площадью бетона $\alpha A_s$, где $\alpha$ - отношение модулей упругости арматуры и бетона. Напряжение в арматуре также выражается через напряжение в бетоне на уровне центра тяжести арматуры $\sigma_s = \alpha \sigma_s$.

Оценка прочности железобетонных элементов проводилась по допускаемым напряжениям, которые устанавливались как некоторые доли от предела прочности бетона на сжатие и предела текучести арматуры. Преимущество метода заключалось в том, что он не требовал эмпирических зависимостей. Вместе с тем метод не учитывал неупругую работу железобетонного элемента, что приводило к снижению прочности и перерасходу материалов.

С целью совершенствования этого метода расчета были предложены различные законы распределения напряжений по сечению, в частности: билинейный с различными модулями упругости в сжатой и растянутой зонах; различные сочетания трапецеидального, билинейного параболического в сжатой зоне с появлением трещин или равномерно распределенным в растянутой зоне [123]. Для гибких колонн эти расчеты корректировались с учетом коэффициента понижения допускаемого напряжения или дополнительного момента от прогиба.

Позже Гвоздев А.А. предложил новый метод расчета несущей способности конструкций – метод предельного равновесия. По этому методу считается, что в сечении изгибаемых и сжатых железобетонных элементов под действием нагрузки образуется пластический шарнир, характеризуемый одновременно возникающими предельными напряжениями в бетоне и арматуре. Бетон в растянутой зоне не работает, напряжения его равны нулю. Напряжения в бетоне сжатой зоны равны сопротивлению бетона $R_b$, эпюра напряжений здесь

прямоугольная. Напряжения в арматуре соответственно равны пределу текучести $R_s$ и $R'_s$ на растяжение и сжатие.

Преимуществом такого метода является отсутствие необходимости использовать гипотезу плоских сечений и диаграмму деформирования для бетона и стали. Для расчета составляются два уравнения равновесия для отсеченной по опасному сечению части балки в виде суммы проекции сил на ось балки и суммы моментов относительно какой-либо горизонтальной оси сечения. Первое уравнение позволяет определить высоту сжатой зоны бетона, а второе – величину максимального изгибающего момента, при котором возникает пластический шарнир, т.е. происходит исчерпание несущей способности железобетонного элемента. Допускаемое при эксплуатации усилие определяют делением предельного усилия на общий нормативный коэффициент запаса прочности.

Учет нелинейных свойств железобетона повышала несущую способность элемента, что приводило к экономии материала. Модель пластического шарнира продвинула теорию железобетона далеко вперёд и позволила решить множество важных практических задач.

Однако метод имел и недостатки. Применение в строительстве высокопрочных сталей и бетонов привело к необходимости вводить ограничения на высоту сжатой зоны. Для этого потребовались дополнительные эмпирические коэффициенты. Еще одним недостатком метода является то, что возможные отклонения фактических нагрузок и прочностных характеристик материалов от их расчетных значений не могут быть явно учтены одним общим коэффициентом запаса прочности.

Для расчетов сжатых колонн кроме модели пластического шарнира дополнительно используется модель сжато-изогнутого стержня. С помощью линейной модели определяется наибольший прогиб такого стержня. При учете пластических деформаций такие расчеты становятся весьма затруднительными в математическом отношении. Поэтому стали использовать приближенное решение путем аппроксимации изогнутой оси стержня подходящей кривой и рассмотрения напряженно-деформированного состояния одного опасного сечения стержня. Из уравнении равновесия отсеченной части стержня с учетом прогиба получают уравнение для определения равновесного состояния стержня при упругопластических деформациях. Это уравнение зависит от гибкости стержня и решается в основном графическими или численными методами. Применение различных критериев позволяет исследовать различные предельные состояния: потеря несущей способности, потеря устойчивости.

В последнее десятилетие на постсоветском пространстве активно внедряется деформационная модель расчета железобетонного элемента, которая на Западе внедрена намного раньше. По этой модели поперечное сечение железобетонного элемента делится на элементарные площадки, в

пределах которых напряжения считаются равномерно распределенными. Считается справедливой гипотеза плоских сечений, то есть принимается, что деформации по высоте сечения меняются по линейному закону. Внутренние усилия по сечению определяются путем суммирования усилий по малым площадкам, в пределах которых принимаются средние значения напряжений. Момент внутренних сил также определяется суммированием моментов сил, действующих по элементарным площадкам. Деформационная модель основана на условиях равновесия, гипотезе плоских сечений, диаграммах состояния материалов и представляет собой шаговый метод последовательных нагружений, на каждом шаге которого реализован итерационный процесс вычисления деформаций на элементарных площадках по методу упругих решений.

Эта модель хорошо сочетается с методом конечного элемента при нелинейных расчетах конструкций. Она уже заложена как в зарубежные, так и в отечественные строительные нормы [134-136] и позволила получить универсальный метод, позволяющий производить расчет напряженно-деформированного состояния для произвольной формы поперечного сечения и характера армирования железобетонного элемента для всех видов предельного состояния. Недостатком метода является необходимость использования специальных компьютерных программ.

В настоящее время нормативные расчеты ведутся по методу предельных состояний, который является развитием метода предельного равновесия. При расчете по этому методу четко устанавливают предельные состояния конструкций и вводят систему расчетных коэффициентов, которые гарантируют, что такое состояние не наступит при самых неблагоприятных сочетаниях нагрузок и при наименьших значениях прочностных характеристиках материалов.

Железобетонные конструкции должны удовлетворять обоим требованиям расчета предельным состояниям, установленным СНиП 2.03.01-84* [191]. Расчет по несущей способности должен предотвращать все виды разрушения конструкции. Для этого вводятся коэффициенты надежности по нагрузке, коэффициенты сочетания нагрузок и коэффициенты, учитывающие ответственность объекта.

При расчетах принимают следующие исходные положения:

- бетон растянутой зоны не работает, растягивающее усилие воспринимает арматура, в которой напряжение не превышает расчетное сопротивление $R_s$;
- напряжение в бетоне сжатой зоны распределено равномерно и равно расчетному сопротивлению $R_b$.

Высоту сжатой зоны определяют из уравнения равновесия предельных усилий. Условие прочности формулируется в виде требования о том, чтобы момент внешних сил не превышал момента внутренних усилий.

Расчет по предельным состояниям второй группы выполняют, чтобы предотвратить следующие явления: появление трещин, если они не допустимы; образование чрезмерного и продолжительного раскрытия трещин, если они допустимы; чрезмерные перемещения.

В зависимости от вида арматуры к трещиностойкости железобетона предъявляют три категории требований:

- первая категория - образование трещин не допускается;
- вторая категория - допускается ограниченное по ширине непродолжительное раскрытие трещин;
- третья категория - допускается ограниченное по ширине непродолжительное и продолжительное раскрытие трещин.

Для оценки соответствия железобетонных конструкций этим требования проводят расчет по образованию трещин, т.е. определяют момент внутренних сил в сечении перед образованием трещины $M_m$. Трещина не образуется, если внешний момент будет меньше $M_m$.

В нормативных расчетах по образованию трещин исходят из следующих положений:

- сечения при изгибе остаются плоскими;
- трещина образуется, если растягивающие напряжения в бетоне достигнут предела прочности $R_{bt}$;
- эпюра растягивающих напряжений прямоугольная, а эпюра сжимающих напряжений линейная (треугольная).

В некоторых предварительно напряженных элементах перед образованием трещин вследствие высокого уровня напряжений в бетоне сжатой зоны развиваются неупругие деформации. Практические методы расчета момента по образованию трещин основаны на замене криволинейной эпюры нормальных напряжений бетона сжатой зоны прямоугольной или трапециевидной эпюрой.

Нормы допускают определять момент по образованию трещин по способу ядровых моментов [120].

Наиболее точные результаты можно получить путем расчета по деформационной модели с применением стандартных программ. Такие расчеты, проведенные нами с применением ПК ЛИРА, показали, что эпюра растягивающих напряжений криволинейна, а эпюра сжимающих напряжений близка к линейной. На этой основе в данной работе предложен новый метод расчета момента по образованию трещины (п. 2.2.1), а также получены регрессионные зависимости для этого параметра (п. 2.4).

Если внешний момент превысит момент по образованию трещины, то для оценки прочности необходимо определить параметры напряженного состояния сечения с трещиной, в том числе длину трещины. Такие методы расчета изложены подробно в параграфе 2.3.1, а также разработан новый аналитический метод расчета (п. 2.3.2).

В случае образования трещины может возникнуть необходимость расчета ширины раскрытия трещины (вторая и третья категории требований к трещиностойкости. Большой объем теоретических и экспериментальных исследований в этом направлений выполнен в НИИЖБ [160]. На их основе ширину раскрытия трещины на уровне оси растянутой арматуры определяют по формуле

$$a_m = \psi_s(\sigma_s / E_s)h_m, \qquad (1.1)$$

где $E_s$, $\sigma_s$ – модуль упругости и напряжение в арматуре в сечении с трещиной; $h_m$ – шаг трещин; $\psi_s$ – коэффициент неравномерности деформации арматуры. Для определения $h_m$ и $\psi_s$ существуют эмпирические зависимости, предложенные разными авторами.

Нормы рекомендуют определять ширину раскрытия трещины по следующей эмпирической формуле:

$$a_{crc} = \delta\phi_l\eta\frac{\sigma_s}{E_s}20\left(3{,}5-100\mu\right)\sqrt[3]{d}, \qquad (1.2)$$

где $\delta$ - коэффициент, зависящий от вида деформаций; $\phi_l$ - коэффициент, учитывающий длительность действия нагрузки; $\eta$ - коэффициент, учитывающий вид арматуры.

Появление трещин приводит к нарушению сцепления арматуры с бетоном, что снижает прочность и долговечность несущих железобетонных конструкций. Достаточно полный анализ причин, вызывающих нарушение сцепления арматуры с бетоном, выполнен в работе [192]. Исследованиями [193] установлено, что в изгибаемых железобетонных балках с пониженным сцеплением арматуры с бетоном разрушение происходит в сжатом бетоне раньше разрыва арматуры, меняется характер трещинообразования: длина и шаг трещин увеличивается. В работах Леонгарда Ф. [128] установлено, что нарушение сцепления бетона и арматуры нарушает принятый закон плоских сечений, деформации бетона увеличиваются, а деформации арматуры не меняются. Разрушение элемента происходит по бетону при нагрузках на 30% меньше, чем в элементе с полным сцеплением.

Вопросами влияния нарушения сцепления арматуры с бетоном на прочность, в том числе несущих железобетонных изгибаемых конструкций, занимались многие исследователи [192-197]. В основном ими предлагается производить расчеты по действующим нормам с введением дифференцированных коэффициентов, величины которых устанавливаются на основе опытных данных.

Были предложения вести расчет по теории составных стержней Ржаницына А.Р. Однако такой подход не учитывает влияния нарушения сцепления на напряжения в конструкции.

Нам кажется при расчете конструкций с нарушенным сцеплением заслуживает большего внимания методика, приведенная в работе [196], которая использует действующие нормы проектирования и схемы расчета. Важно то, что методика позволяет вести расчет по СНиП 2.03.01-84* [191]. Сопоставление расчетных данных с результатами экспериментальных исследований показали хорошее согласование.

Прочность железобетонных элементов с трещиной зависит от длины возникающей трещины, которая меняется с изменением условий эксплуатации. В целом разрушение является процессом развивающемся во времени. По характеру развития процесса разрушения различают устойчивое продвижение трещин, которое происходит постепенно по мере увеличения нагрузок или продолжительности их воздействия, и их неустойчивый рост, не связанный с увеличением нагрузок и обычно приводящий к мгновенному исчерпанию несущей способности конструкций. Исследование закономерностей страгивания и развития трещин составляет предмет механики разрушения.

Вершина трещины представляет собой острый концентратор напряжений. С позиции линейной теории упругости она является особой точкой, поскольку напряжение в ней стремится к бесконечности. Интенсивность стремления напряжения к бесконечности зависит от формы и размеров трещины и тела, величины и характера внешней нагрузки. Эта интенсивность принимается в качестве характеристики напряженного состояния у вершины трещины и называется коэффициентом интенсивности напряжений (КИН).

Трещина будет развиваться устойчиво, если вычисленное значение КИН будет меньше предельного значения, определяемого экспериментально для материала.

Коэффициент интенсивности напряжений определяется в основном численными методами. Методика его расчета МКЭ хорошо разработана и используется при расчете металлических конструкций. К сожалению, методы механики разрушения при расчете железобетонных элементов не получили должного применения до сих пор. Это связано, во-первых, с необходимостью объемной постановки задачи из за наличия арматурных стержней, во-вторых, с отсутствием универсальных программ, адаптированных для автоматизированного расчета КИН в железобетоне.

Тем не менее упрощенные расчеты с использованием КИН по блочной модели Пересыпкина Е.Н. для слабо армированных элементов производятся. В работе [126] изложена методика расчета железобетонных элементов прямоугольного сечения с использованием экспериментально-аналитических

графиков, построенных с применением методов линейной механики разрушения.

### 1.3. Конечно-элементный анализ напряженно–деформированного состояния

Метод конечных элементов (МКЭ) является эффективным численным методом решения широкого круга краевых задач механики сплошной среды. Он основан на замене исследуемого объекта совокупностью конечного числа дискретных элементов, связанных между собой в узлах. Такой подход позволяет описывать перемещения внутри элементов простейшими функциями, естественно формировать граничные условия, рассматривать тела с произвольными границами и получать ленточные матрицы жесткости, связывающие напряжения и перемещения узлов элемента. При обеспечении непрерывности перемещений между элементами обеспечивается сходимость метода при увеличении количества конечных элементов.

При решении задач определения напряженно-деформированного состояния МКЭ основные матричные выражения получены вариационными методами. В основе этих соотношений лежат уравнения теории упругости и пластичности.

Для рассматриваемого класса задач можно показать, что решение поставленной задачи связано с минимизацией функционала потенциальной энергии

$$F = \frac{1}{2}\int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_V \{f\}^T \{p\} dV - \int_S \{f\}^T \{g\} dS, \qquad (1.3)$$

где $\{\sigma\}, \{\varepsilon\}$ – векторы-столбцы напряжений и деформаций; $V$ – объем тела; $S$ – граница тела; $\{f\}$ – вектор-столбец перемещений тела; $\{p\}$ – распределенные массовые силы; $\{g\}$ – распределенная внешняя нагрузка.

При таком подходе расчет МКЭ состоит из следующих этапов.

**Разбиение объекта на конечные элементы.** Выбор типа конечного элемента зависит от постановки задачи и геометрии конструкции. Для обеспечения необходимой точности расчетов важен выбор количества узловых точек в элементе и размер конечного элемента. Количество узловых точек зависит от характера изменения искомой функции, а размер конечного элемента обычно определяется путем решения тестовых задач.

**Аппроксимация искомой функции.** В качестве основных неизвестных в МКЭ принимаются узловые значения искомой функции и ее частные производные. Порядок частных производных зависит от порядка разрешающих уравнении теории упругости для данной задачи. Число неизвестных в узле называется числом степеней свободы. После выбора узловых неизвестных определяется аппроксимирующий полином, который выражает закон изменения искомой функции $u(x, y, z)$ по объему конечного элемента через значения его узловых неизвестных. Эти полиномы и их производные до соответствующего порядка

должны быть непрерывны во всей области решения. Значение непрерывной функции $u^{(e)}$ в произвольной точке конечного элемента аппроксимируем полиномом

$$u^{(e)} = [N]^{(e)}\{\delta\}^{(e)}, \qquad (1.4)$$

где $[N]^{(e)}$ – матрица-строка, элементы которой называются функциями формы конечного элемента; $\{\delta\}^{(e)}$ – вектор узловых неизвестных конечного элемента.

Тогда аппроксимация закона изменения искомой функции $u(x, y, z)$ по всей области решения определяется суммой

$$u(x, y, z) = \sum_{e=1}^{M} [N]^{(e)}\{\delta\}^{(e)} = [N]\cdot\{\delta\}, \qquad (1.5)$$

где $M$ – число конечных элементов дискретной модели; $\{\delta\}$ – вектор узловых неизвестных для всей совокупности конечных элементов.

$$[N] = \left\{[N]^{(1)}, [N]^{(2)}, \ldots [N]^{(M)}\right\}.$$

Система (1.5) является моделью искомой непрерывной функции.

**Получение основной системы разрешающих уравнений.** В общем случае вектор $\{\delta\}$ неизвестен. В вариационном МКЭ алгоритм получения основной системы разрешающих уравнений основан на минимизации функционала (1.3) и состоит из следующих этапов [28].

*Этап* 1. Функционал $F$, представляется суммой соответствующих функционалов, относящихся к отдельным конечным элементам

$$F = \sum_{e=1}^{M} F^{(e)}.$$

*Этап* 2. Подстановка аппроксимирующего выражения (1.) в уравнение функционала (1.3) и получение элементных вкладов в функционал $F$. Функции, входящие в функционал (1.3), выражаются через вектор узловых перемещений с помощью соотношений теории упругости и выражения (1.4):

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\}^{e}, \quad \{\sigma\} = [D]\cdot[B]\{\delta\}^{e}, \qquad (1.6)$$

где [B] – матрица связи деформаций с узловыми перемещениями элемента; [D] – матрица упругости.

*Этап* 3. Минимизация функционала $\mathsf{F}$ по вектору $\{\delta\}$ приводит к системе уравнений

$$\frac{\partial \mathsf{F}^{(e)}}{\partial \{\delta\}^{(e)}} = 0 .$$

Суммирование этих выражений по конечным элементам, примыкающим к рассматриваемому узлу, при переборе всех узлов приводит к системе алгебраических уравнений

$$[\mathsf{K}]\{\delta\} + \{\mathsf{R}\} = 0, \qquad (1.7)$$

где $\{\delta\}, \{\mathsf{R}\}$ – вектор узловых перемещений и нагрузки для всей системы;

$[\mathsf{K}] = \sum_{e} [\mathsf{k}]^{e} = \sum_{e} (\int_{V} [\mathsf{B}]^{\mathsf{T}} [\mathsf{D}][\mathsf{B}] d\mathsf{V})^{e}$ – матрица жесткости системы элементов.

*Этап* 4. Для однозначного решения системы (1.7) на нее нужно наложить граничные условия задачи. Это позволяет определить неизвестный вектор узловых перемещений. Для линейных краевых задач система уравнений (1.7) линейна. Для нелинейных краевых задач система (1.7) не линейна, поскольку матрица $[\mathsf{K}]$ является функцией определяемых неизвестных параметров $\{\delta\}$.

При решении нелинейной системы используются итерационные методы.

**Определение выходных параметров краевых задач.** После определения вектора $\{\delta\}$ с помощью зависимости (1.4) можно определить вектор $\{\mathsf{u}\}^{(e)}$ для каждого элемента. Напряжения и деформации в каждом элементе определяются по соотношениям (1.6).

Широкое внедрение в расчетную практику быстродействующих ЭВМ привело к созданию универсальных программных пакетов на основе МКЭ, применяемых при анализе работы и проектировании различных конструкции в условиях разнообразных воздействий. Эти пакеты получили общее название CAE - системы (Computer Aided Engineering). Стремительное развитие и распространение персональных компьютеров в последние годы привело к тому, что большие программные пакеты стали доступны широчайшему кругу пользователей. Нынче CAE -системы получили широкое распространение в инженерной среде, вытеснив старые методы расчета и проектирование деталей, заменив многие виды испытаний компьютерным моделированием.

В настоящее время имеется большая библиотека универсальных и специальных конечных элементов, созданы эффективные алгоритмы и универсальные программные комплексы: ANSYS, COSMOS, NASTRAN, DINA, LIRA, ПРИНС и др. Нами проанализированы возможности, достоинства и доступность всех имеющихся на рынке пакетов программ.

Этот анализ позволил нам сделать выбор в пользу программного комплекса (ПК) ANSYS.

Одним из главных преимуществ программы ANSYS является объединение трех основных составляющих конечно - элементного расчета: подготовка данных (препроцессор), решение, обработка результатов (постпроцессор). Этот синтезированный подход приводит к тому, что легко и быстро можно научиться пользоваться программой ANSYS. Программа может работать как в интерактивном режиме с помощью графического интерфейса пользователя (ГИП), так и в командном режиме. Немаловажным достоинством программы является наличие большой библиотеки конечных элементов.

Команды ПК ANSYS сгруппированы по функциональной близости и делают прозрачным смысл команд по их краткому синтаксису. Пользователи, знакомые с командами программы, могут вводить их непосредственно с клавиатуры в командной строке. Команды ANSYS и соответствующие им последовательность операции в ГИП можно найти в [198, 199], где они приведены в алфавитном порядке или в [200], где они сгруппированы по функциональному назначению. Общие инструкции по применению этой программы наиболее полно изложены в [201].

Программа ANSYS использует единую централизованную базу данных для хранения всех данных о модели и результатов расчета. Преимущество общей базы данных состоит в том, что данные, определенные в одном процессоре являются доступными для других процессоров. Данные о модели (описание геометрии, конечно-элементное разбиение, материалы и т. д.), записываются в базу данных с помощью препроцессора ANSYS. Решатель программы работает непосредственно с информацией, хранящейся в базе данных, и записывает результаты в ту же базу данных. Обработка результатов расчета проводится с помощью программ постпроцессора, которые берут информацию непосредственно из базы данных.

Кроме этого в ANSYS встроены процедуры моделирования трещин и вычисления параметров механики разрушения: КИН и J-интеграла. Имеется специальная литература на русском языке [20, 198, 199] с инструкциями и примерами вычисления параметров механики разрушения.

В связи с вышеизложенным для определения напряженного состояния строительных конструкций с трещинами и последующего вычисления параметров механики разрушения будем использовать ПК ANSYS. Эти расчеты будут использованы для оценки трещиностойкости элементов конструкций.

Вместе с тем при определении напряженно-деформированного состояния изгибаемых железобетонных балок целесообразно применение ПК ЛИРА. Эта программа создана для расчета строительных конструкций и обладает рядом специальных возможностей.

1. В ней заложены наиболее часто встречающиеся законы, описывающие диаграммы деформирования бетона и арматуры. Иногда параметры этих законов также имеются в программе, достаточно указать класс и марку материала.

2. В ней автоматизировано моделирование железобетона, достаточно указать координаты центра тяжести арматуры, ее площадь и материал.
3. Алгоритм нелинейного расчета базируется на деформационной модели, которая позволяет автоматически исключать из расчета области с трещиной, что дает возможность определять длину эксплуатационных трещин.
4. Программа позволяет определить шаг и раскрытие трещин на основе нормативной методики расчетов.
5. Она позволяет учесть последовательность (историю) нагружения, что важно при нелинейных расчетах.
6. Она позволяет легко моделировать предварительное натяжение арматуры.
7. Программа имеет полный список стандартных сечений бетонного элемента, куда можно произвольно встраивать арматуру. Это позволяет нам при расчете изгибаемых железобетонных балок пользоваться стержневыми элементами.

Таким образом, при определении напряженного состояния изгибаемых железобетонных балок мы будем пользоваться ПК ЛИРА. На основе этих расчетов будет производиться оценка технического состояния конструкций по обоим группам предельных состояний.

### 1.4. Планирование компьютерных экспериментов и методика регрессионного анализа

Общим недостатком численных методов расчета является трудность анализа конечных результатов в плане управления расчетной величиной. Из решения неясно, какие входные параметры, насколько и в каком направлении лучше изменить, чтобы получить желаемый результат. Чтобы уловить тенденции изменения необходимо проводить многократные расчеты с пошаговым изменением многих варьируемых параметров. Для анализа конечных результатов необходимо иметь аналитические зависимости расчетного параметра от варьируемых факторов.

Для получения этих зависимостей сначала нужно выделить параметры, которые оказывают существенное влияние на выходной параметр. Затем надо определить реальные пределы изменения этих параметров. Уровни каждого аргумента следует задать таким образом, чтобы они удовлетворяли требованиям арифметической прогрессии (имели одинаковые интервалы). Это дает возможность должным образом планировать эксперимент и позволяет значительно сократить необходимый его объем.

Под планированием экспериментов понимают установление оптимального плана их проведения. Целью планирования является получение функции отклика с допустимой точностью при минимальном объеме испытаний. Сокращение числа испытаний при их научном планировании достигается за счет использования известных или предполагаемых математических зависимостей, возможности планировать эксперимент с учетом уже

полученных результатов и, главное, за счет целенаправленного одновременного варьирования изучаемых факторов.

При планировании экспериментов важен выбор уровней факторов. Он производится с учетом двух противоречивых требований: уровни факторов должны перекрывать весь возможный диапазон его изменения, общее количество уровней по всем факторам не должно приводить к черезмерному объему испытаний.

Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называется полным факторным экспериментом (ПФЭ). Если число уравней для всех факторов одинаково и равно $L$, то общее количество испытаний $N = L^k$, где $k$ - число факторов. Недостатком ПФЭ является большие затраты времени на подготовку и проведение испытаний. Поэтому использование ПФЭ целесобразно только в том случае, когда в эксперименте исследуется взаимное влияние всех факторов модели.

Если такие взаимосвязи отсутствуют или ими можно пренебречь, то целесообразно использовать рациональное планирование эксперимента [202, 203]. Применение этого метода сокращает число испытаний по сравнению с ПФЭ в $L^{k-2}$ раза.

При большом числе факторов для получения плана эксперимента $(k > 4)$ более рациональным является применение числовых матриц. Число строк в матрице равно числу опытов, а число столбцов – числу влияющих факторов. Комбинация цифр в каждой строке представляет собой сочетание уровней факторов в соответствующем опыте. Такие планы строятся на основе латинских квадратов. Для получения оптимального плана пригодны только ортогональные латинские квадраты. Методика построения взаимно ортогональных квадратов подробно описаны в [203].

Рассмотрим алоритм формирования матрицы планирования. Он базируется на заданном векторе (строке) формируемой матрицы, которая будет первой строкой матрицы. Остальные строки получаются наращиванием номера уровня на единицу по столбцу матрицы с порядком от последнего к первому номеру. Первая строка последующего латинского квадрата состоит из диагонали предыдущего квадрата. План эксперимента состоит из $L$ матриц планирования, имеющих $L$ строк и $k$ столбцов.

Построим план эксперимента при $L = 4$, $k = 4$. Число опытов при ПФЭ равно $N=256$. Применение РПЭ сокращает число опытов в $4^2 = 16$ раз, то есть имеем $N=16$. Примем начальный вектор – строку в виде: 1 2 3 4. Тогда получим 4 латинских квадрата:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1: 1 2 3 4 | 5: 1 3 1 3 | 9: 1 4 3 2 | 13: 1 1 1 1 |
| 2: 2 3 4 1 | 6: 2 4 2 4 | 10: 2 1 4 3 | 14: 2 2 2 2 |
| 3: 3 4 1 2 | 7: 3 1 3 1 | 11: 3 2 1 4 | 15: 3 3 3 3 |
| 4: 4 1 2 3 | 8: 4 2 4 2 | 12: 4 3 2 1 | 16: 4 4 4 4 |

Алгоритм выдает план экспериментадля количества факторов, равного числу уровней. Очевидно,что если число факторов меньше, необходимо ограничиться соответственным значением столбцов. Каждая строка плана соответствует одному опыту. Эти опыты мы будем проводить на ЭВМ с применением программных комплексов.

По результатам машинного эксперимента строятся регрессионные зависимости для параметров модели. Существует два метода их получения традиционный и нетрадиционный.

Традиционный метод моделирования представляет собой отклик в форме полинома некоторой степени, коэффициенты которого находятся решением системы линейных уравнений. Для полиномов высоких степеней число уравнений системы будет возрастать. Поэтому для числа аргументов более 5 становятся громоздкими решения систем уравнений для полиномовдаже второй степени.

Классический регрессионный анализ может быть реализован с помощью стандартных программных комплексов, например, *ПК* Matlab.

Нетрадиционный метод регрессионного анализа базируется на разработках проф. М.М. Протодьяконов и заключается в выборе частных (парных) зависимостей из числа пятнадцати уравнений. Они как правило, с достаточной точностью описывают большинство физических явлений с плавным изменением функций. Нетрадиционный метод реализован в программе ANETR, созданной в КарГТУ [203]. Работа с программой не требует специальной подготовки.

Отыскание многфакторных моделей в ANETR может проводиться с помощью двух вариантов:

1) Отыскание частных (парных) зависимостейцелевой функции с каждым из анализируемых аргументов. Компонуется уравнения частных связей в многомерную модель в виде их произведения или суммы

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{f_1(x_1)\cdot f(x_2)\cdot \dots \cdot f_m(x_m)}{\bar{y}\cdot(m-1)} \quad \text{или} \quad y = \sum_{i=1}^{m} f_i(x_i) - \bar{y}\cdot(m-1)$$

Этот вариант может использоваться в случаях, когда частные зависимости проявляются достаточно четко, что обычно имеет место при малом числе аргументов $m \le 4$.

2) При значительном числе аргументов не все они проявляются достаточно четко, их выявление требует предварительного и последовательного исключения влияния на результирующую функцию сильнодействующих факторов – нейтрализации их влияния [203]. Сущность одного шага такой нейтрализации заключается в делении исходных значений функций на расчетное ее значение по найденному эмпирическому уравнению парной связи.

По трансформированному массиву исходных данных продолжают отыскивать влияния оставшихся факторов, начиная с наиболее сильнодействующего, связь которого с новой функцией после нейтрализации влияния предыдущего проявляется наиболее четко. И так до исчерпания всех факторов. Выбор наиболее сильнодействующего фактора осуществляется сравнением среднеквадратического отклонения (СКО) расчетных значений функции по парной зависимости от исходных и выявлением фактора с минимальным СКО.

При описанной нейтрализации конечная модель выражается произведением найденных частных уравнений

$$y = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \ldots f_m(x_m).$$

Нейтрализация сильнодействующего фактора может осуществляться вычитанием из исходной функции расчетной по найденному уравнению. В этом случае конечная модель представляет собой многочлен

$$y = \sum_{i=1}^{m} f_i(x_i).$$

Возможен и комбинированный способ нейтрализации, когда этапы с делением чередуются с этапами вычитания. Тогда и конечная модель будет иметь более сложный вид, например, такой

$$y = [\, f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) + f_3(x_3)] \cdot f_4(x_4).$$

Каждая нейтрализация осуществляется над массивом, в котором учтено влияние всех предыдущих аргументов. Для последующего аргумента этот массив – единое целое (взят в скобки).

Для определения частных зависимостей используется набор из 15 эмпирических уравнений, коэффициенты которых определяются методом средних, методом наименьших квадратов и методом итерации. Подробное описание всех 15 эмпирических уравнений и методы нахождения коэффициентов этих уравнений изложено в [204].

Адекватность общей модели оценивается СКО расчетных и экспериментальных значений выходной величины, а также коэффициентом множественной корреляции модели $-R$.

Обоснованность применения не традиционного построения многомерных моделей показана в работе [204], где проведено сравнение получаемых моделей на одних и тех же исходных данных.

Выбранный таким образом метод нетрадиционного построения многомерных моделей имеет ряд преимуществ:

- в нетрадиционном методе используется меньшее число коэффициентов, что сокращает вычислительные ресурсы;
- подбор кривой по 15 эмпирическим уравнениям;
- конечная модель в нетрадиционном методе может иметь вид суммы, произведения частных зависимостей, их комбинации;
- этот метод предусматривает весьма полезную процедуру последовательной нейтрализации сильнодействующего фактора для проявления характера влияния на целевую функцию остальных.

### 1.5. Постановка задач исследования

Из обзора работ, посвященных расчету железобетонных конструкций, следует, что недостаточно внимания в исследованиях уделено определению напряжений от предварительного натяжения арматуры. Эта операция рассматривается только как способ повышения трещиностойкости. Вместе с тем, эти напряжения влияют на напряженное состояние элемента, и через него на предельное состояние эксплуатируемой конструкции. В связи с этим, нужны расчетные зависимости, позволяющие определять предварительные напряжения и учитывать их при оценке реального состояния конструкций.

Также следует отметить, что работ, посвященных аналитическому определению параметров напряженного состояния железобетонных элементов с трещиной, очень мало, нет и общепринятой методики нелинейного расчета этих элементов конструкций. Кроме того работ, где расчетным путем определялась бы длина трещины, практически нет. Во всех цитированных работах трещина считается существующей, а длина ее известной. Действительная длина трещины зависит от приложенной нагрузки и в данной работе предлагается метод, позволяющий рассчитать все параметры напряженного состояния в сечении, в том числе и длину трещины.

В настоящее время имеется общепринятая методика определения момента по образованию трещины. Проведенные нами численные расчеты с помощью ПК ЛИРА показывают существенную разницу между аналитическими и численными результатами. В связи с этим надо пересмотреть методику определения момента по образованию трещины.

Вышеуказанные пробелы в расчете железобетонных конструкций связаны с сложностью решения задач об определений напряженно-деформированного состояния изгибаемых железобетонных балок. Проблемы возникают в связи с физической нелинейностью и статической неопределимостью задачи. Кроме того, исходная длина трещины неизвестна, а появление трещины приводит к нарушению сцепления бетона с арматурой по длине балки и существенному перераспределению напряжений в сечений с трещиной.

В связи с вышеизложенным все имеющиеся аналитические методы расчета напряженного состояния балок с трещинами являются приближенными. Точность таких методов зависит от точности выполнения исходных гипотез, которая зависит от уровня напряжений, и точности решения системы нелинейных уравнений. В связи с бурным развитием компьютерной техники и созданием все новых универсальных программных комплексов в настоящее время нелинейные задачи с необходимой точностью решаются численными методами.

Общим недостатком численных методов расчета является трудность анализа конечных результатов в плане управления расчетной величиной. Кроме этого полученные результаты невозможно использовать при количественном изменении свойств материалов, параметров конструкций или нагружения.

Для обоснованного выбора параметров железобетонных конструкций и управления параметрами нагружения необходимо иметь аналитические зависимости выходных величин от варьируемых параметров. Для получения этих зависимостей нужно спланировать и поставить многофакторный компьютерный эксперимент. Путем обработки результатов такого эксперимента можно получить искомые регрессионные зависимости.

Появление в элементах конструкций трещин еще не означает исчерпания его несущей способности. В зависимости от режимов и условий эксплуатации, размера и характера трещины они получают устойчивое или неустойчивое развитие, а могут не развиваться вовсе. При неустойчивом развитии трещин может произойти разрушение конструкций, а при устойчивом развитии тела с трещинами могут надежно функционировать еще значительное время.

Из анализа работ по расчету тел с трещиноподобными дефектами следует, что решение конкретных задач механики разрушения связано с применением МКЭ для решения задач о НДС тел с трещинами. Для этого необходима дальнейшее совершенствование алгоритмов и вычислительных процедур определения параметров механики разрушения.

Для металлических конструкций все еще актуальной остается определения параметров механики разрушения для пластин конечных размеров с произвольно ориентированной трещиной. Задачи механики разрушения для железобетонных конструкций практически еще не решались.

Актуальной является разработка двухпараметрических критериев, которые повышают адекватность модели разрушения и выражают условия разрушения через доступные параметры механики разрушения. Для практического применения очень важна разработка инженерной методики проверочного и проектного расчета элементов конструкции с трещинами.

На основании вышеизложенного была сформулирована цель работы. **Целью** работы является исследование напряженно-деформированного состояния элементов строительных конструкций с трещиноподобными дефектами и совершенствование на этой основе методики оценки их работоспособности (прочности, трещиностойкости и эксплуатационной

пригодности).

В соответствии с поставленной целью были сформулированы следующие **задачи** исследования.

1. Разработать методику нелинейного аналитического расчета напряженного состояния железобетонных элементов при предварительном натяжении арматуры.

2. На основе планируемых многофакторных компьютерных экспериментов и регрессионного анализа создать математическую модель для определения параметров напряженного состояния предварительно напряженных железобетонных элементов прямоугольного сечения.

3. Разработать аналитический метод расчета напряженного состояния изгибаемых железобетонных балок, позволяющий определить и длину трещины и на этой основе усовершенствовать методику определения момента по образованию трещины.

4. На основе планируемых экспериментов и регрессионного анализа создать математическую модель для определения параметров напряженного состояния изгибаемых железобетонных балок прямоугольного сечения с трещинами.

5. Определить параметры механики разрушения в металлических элементах конструкций с трещинами с предоставлением результатов в виде регрессионной зависимости.

6. Определить коэффициент интенсивности напряжений в изгибаемых железобетонных элементах с трещинами.

7. Разработать методику оценки прочности и эксплуатационной пригодности элементов строительных конструкций с трещиноподобными дефектами.

# 2 ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ИЗГИБАЕМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ТРЕЩИНАМИ

## 2.1 Определение предварительных напряжений в железобетонных балках

### 2.1.1 О предварительных напряжениях

Иногда в железобетонных конструкциях в процессе изготовления специально создают значительные сжимающие напряжения в бетоне натяжением высокопрочной арматуры. Начальные сжимающие напряжения создают в тех зонах бетона, которые впоследствии под действием нагрузок будут испытывать растяжение. Поэтому в предварительно напряженной балке под нагрузкой, бетон испытывает растягивающие напряжения только после погашения начальных сжимающих напряжений. При этом нагрузка, вызывающая появление трещин или ограниченное по ширине их раскрытие, значительно выше, чем соответствующая нагрузка в балке без предварительного напряжения. Вместе с тем разрушающая нагрузка для обеих балок одинаковая, так как предельные напряжения в арматуре и бетоне этих балок одинаковые. В предварительно напряженных балках жесткость конструкции выше, следовательно, прогибы у них будут меньше.

В производстве предварительно напряженных элементов применяются два способа создания предварительных напряжений: натяжение арматуры на упор и натяжение ее на бетон. При этом размещением арматуры на некотором расстоянии от поверхности элемента создается защитный слой бетона. Он необходим для обеспечения совместной работы арматуры с бетоном и защиты арматуры от высокой температуры и агрессивной среды (коррозии), то есть повышает долговечность конструкции. Толщину защитного слоя на основании опыта эксплуатации железобетонных конструкции устанавливают в зависимости от вида и диаметра арматуры, размера сечения элемента, вида и класса бетона, условий работы конструкции.

Величина предварительного напряжения существенно влияет на последующую работу элементов под нагрузкой. При малых предварительных напряжениях в арматуре и малом обжатии бетона эффект предварительного напряжения с течением времени будет утрачен вследствие релаксации напряжений в арматуре, усадки и ползучести бетона и других факторов. При высоких предварительных напряжениях в арматуре, близких к нормативному сопротивлению, в ней возникает опасность разрыва и опасность появления значительных остаточных деформаций. На основании исследований, опыта эксплуатации предварительно напряженных элементов значения предварительного напряжения $\sigma_{sp}$ и $\sigma'_{sp}$ в арматуре, расположенной соответственно в растянутой и сжатой зонах устанавливаются из условия:

$$\sigma_{sp} + p \le R_{sn}; \qquad \sigma_{sp} - p \ge 0,3R_{sn}, \tag{2.1}$$

где $R_{sn}$ – нормативное сопротивление арматуры; $p=0{,}05$ $\sigma_{sp}$ – при механическом способе натяжения; $p=30+360/l$ – при электротермическом способе натяжения

$l$ – расстояние между упорами в метрах.

Начальные предварительные напряжения в арматуре с течением времени уменьшаются. Различают первые потери предварительного напряжения в арматуре, происходящие при изготовлении элемента и обжатии бетона, и вторые потери, происходящие после обжатия бетона. Все виды потерь напряжений определяются по формулам, рекомендациям и таблицам, приведенным в справочной литературе [6, 205, 206]. При любом способе натяжения суммарные потери могут составлять около 30% начального предварительного напряжения. В расчетах эти потери следует принимать не менее 100 МПа.

Эти потери должны быть учтены при натяжении арматуры и последующем расчете напряжений в бетоне и арматуре от предварительного напряжения. В ненапрягаемой предварительно напряженных элементов под влиянием совместных с бетоном деформаций возникают начальные сжимающие напряжения: при обжатии бетона - равные потерям от быстро натекающей ползучести $\sigma'_s = \sigma_6$, а перед загружением элемента добавляется сумма потерь от усадки и ползучести бетона:

$$\sigma'_s = \sigma_6 + \sigma_8 + \sigma_9.$$

Для ненапрягаемой арматуры, расположенной в растянутой при обжатии зоне, принимают напряжение равным потере от усадки бетона $\sigma_s = \sigma_6$.

Усилие предварительного обжатия бетона принимают равным сумме усилии в напрягаемой и ненапрягаемой арматурах:

$$P = \sigma_{sp} A_{sp} + \sigma'_{sp} A'_{sp} - \sigma_s A_s - \sigma'_s A'_s, \qquad (2.2)$$

где $A_{sp}$, $A'_{sp}$ – площади напрягаемой арматуры в растянутой и сжатой зоне;

$A_s$, $A'_s$ – площади ненапрягаемой арматуры в растянутой и сжатой зоне.

Эксцентриситет этого усилия относительно центра тяжести сечения определяют из условия равенства моментов равнодействующей и составляющих:

$$e_{op} = (\sigma_{sp} A_{sp} y_{sp} - \sigma'_{sp} A'_{sp} y'_{sp} - \sigma_s A_s y_s + \sigma'_s A'_s y'_s) / P, \qquad (2.3)$$

где ***y*** через обозначены расстояния от соответствующих арматур до центра тяжести сечения.

В железобетонных конструкциях стальная арматура становится внутренней связью, препятствующей усадке бетона. Согласно опытным данным усадка и набухание железобетона примерно в два раза меньше, чем

бетона. Деформация стесненной усадки бетона приводит к появлению в железобетонном элементе начальных внутренне уравновешенных напряжений - растягивающих в бетоне и сжимающих в арматуре. Эти напряжения при симметричном армировании определяются по формуле

$$\sigma_s = \sigma_{bt} / \mu, \quad \sigma_{bt} = \frac{\varepsilon_{sl} E_s}{1/\mu + \alpha / \nu_t}, \tag{2.4}$$

где $\mu = A_s / A$ – коэффициент армирования; $\varepsilon_{sl}$ – свободная усадка бетона; $\alpha = E_s / E_b$ – отношение модулей упругости арматуры и бетона; $\nu_t = \varepsilon_{el} / \varepsilon_{bt}$ – коэффициент упругопластической деформации бетона.

Растягивающие напряжения в бетоне элемента, армированного односторонней несимметричной арматурой, возрастают вследствие внецентренного приложения к сечению усилий в арматуре

$$\sigma_{bt} = \frac{2,25\varepsilon_{sl} E_s}{1/\mu + 2,25\alpha / \nu_t}. \tag{2.5}$$

С увеличением свободной усадки бетона и содержания арматуры в нем растягивающие напряжения в бетоне увеличиваются и, если они достигают временного сопротивления при растяжении $R_{bt}$, то возникают усадочные трещины. Для тяжелого бетона среднее значение свободной усадки можно принять равным 3 $10^{-4}$, а для бетона на пористых заполнителях – $\varepsilon_{sl} = 4 \cdot 10^{-4}$.

Начальные растягивающие напряжения в бетоне от усадки способствуют более раннему появлению трещин в тех зонах, которые испытывают растяжение от внешней нагрузки. С появлением нагрузочных трещин влияние усадочных трещин уменьшается. В стадии разрушения усадка не влияет на несущую способность статически определимых железобетонных конструкций.

В статически неопределимых железобетонных конструкциях лишние связи препятствуют усадке железобетона, вызывая появление дополнительных внутренних усилий. Влияние усадки эквивалентно понижению температуры на определенное число градусов. Поэтому при расчете таких конструкций следует задать понижение температура на $t = \varepsilon_{sls} / \alpha_t$ градусов, где $\alpha_t$ – коэффициент температурной деформации стали.

Для того, чтобы уменьшить дополнительные усилия от усадки, железобетонных конструкции большой протяженности делят на блоки усадочными швами.

### 2.1.2 Линейный расчет предварительно напряженных балок

Чтобы определить напряжения в сечениях предварительно напряженных железобетонных элементов, рассматривают приведенное бетонное сечение в котором площади арматуры заменяют эквивалентной площадью бетона. Исходя

из равенства деформаций арматуры и бетона, площадь приведенного сечения будет равна

$$A_r = A_b + \alpha\left(A_{sp} + A_s + A'_{sp} + A'_s\right).$$

Статический момент приведенного сечения относительно оси 1-1, проходящей по нижней грани сечения,

$$S_r = \sum A_i y_i,$$

где $A_i$ – площадь $i$-й части сечения; $y_i$ – расстояние от центра этой площади до оси 1-1.

Расстояние от оси 1-1 до центра тяжести приведенного сечения

$$y_0 = S_r / A_r.$$

Момент инерции приведенного сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести приведенного сечения

$$I_r = \sum\left[I_i + A_i\left(y_0 - y_i\right)^2\right],$$

где $I_i$ – момент инерции $i$-й части сечения относительно собственной центральной оси.

При обжатии в бетоне развиваются неупругие деформации, эпюра нормальных напряжений будет нелинейной. В упрощенной постановке напряжения в бетоне определяют в предположений упругой работы сечения и линейности эпюры напряжений:

$$\sigma_{bp} = \frac{P}{A_r} \pm \frac{Pe_{op}\,y}{I_r}, \qquad (2.6)$$

где $e_{op}$ – эксцентриситет силы обжатия относительно центра тяжести приведенного сечения.

При определении максимальных напряжений при обжатии эта формула примет вид

$$\sigma_{bp} = \frac{P}{A_r} + \frac{Pe_{op}\,y_0}{I_r}.$$

При проверке предельных напряжений при обжатии используется эта же формула, но сила обжатия определяется с учетом только первых потерь.

За счет обжатия бетона в арматуре возникают сжимающие напряжения

$$\Delta\sigma_s = E_s\varepsilon_s = E_s\varepsilon_{b,s} = \alpha\sigma_{b,s}, \qquad (2.7)$$

где $\varepsilon_{b,s}$, $\sigma_{b,s}$ – деформация и напряжение в бетоне на уровне центра арматуры. Эти напряжения определяется так же по формуле (2.6).

$$\sigma_{b,s} = \frac{P}{A_r} + \frac{Pe_{op}y_{sp}}{I_r};\ \sigma'_{b,s} = \frac{P}{A_r} - \frac{Pe_{op}y'_{sp}}{I_r}.$$

При установлении контрольного напряжения в арматуре, натягиваемой на бетон, и расчете потерь напряжения в ней от ползучести, напряжения в бетоне также определяются по этим формулам, но сила обжатия $P$ беретсяс учетом только первых потерь напряжения.

Изложенный подход к определению напряжений от предварительного натяжения арматуры является сейчас общепринятым. На наш взгляд замена реального сечения приведенным не совсем оправдано. Поэтому предлагаем другой метод решения, тоже основанный на линейном подходе, но учитывающий статическую неопределимость задачи.

Рассмотрим двутавровое сечение с вертикальной осью симметрии (рис. 2.1, а). Введем обозначения:

$A_{ct}$, $A_c$ – площадь свесов полок в растянутой и сжатой зоне;

$h_t$, $h_c$ – толщина полок в растянутой и сжатой зоне;

$a$, $a'$ – толщина защитного слоя бетона в растянутой и сжатой зоне;

$A_s$, $A'_s$ – площадь арматуры в растянутой и сжатой зоне;

$N_a$, $N'_a$ – внутренние усилия в арматуре в растянутой и сжатой зоне.

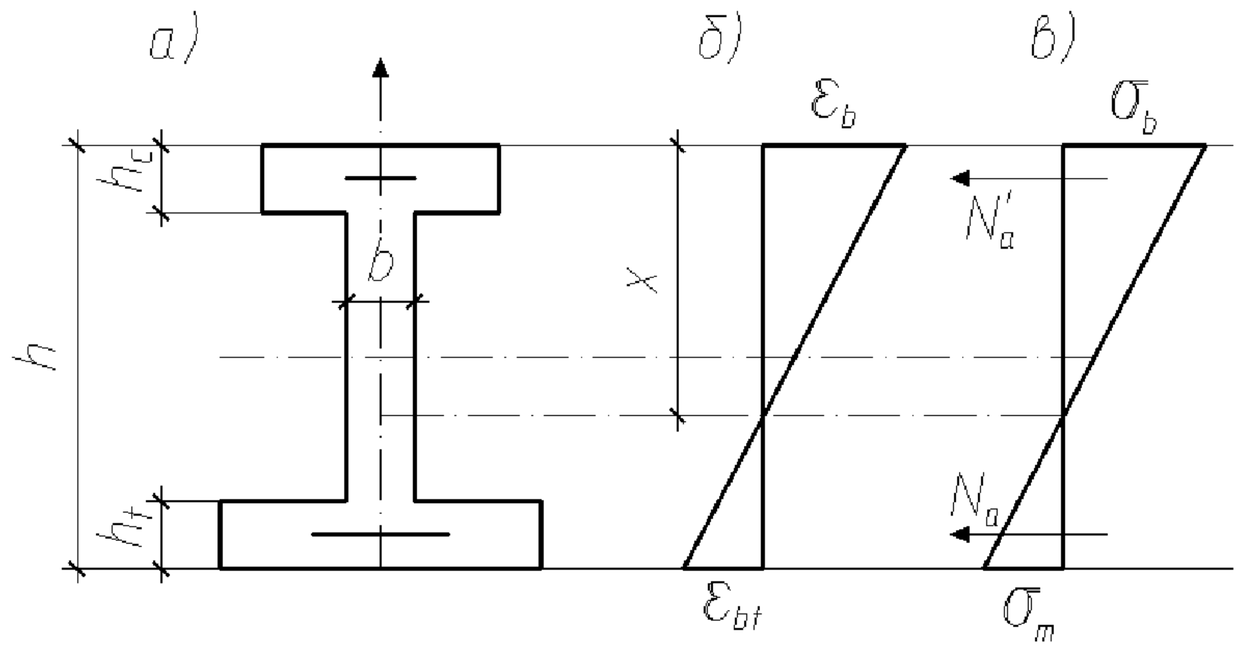



Рисунок 2.1 – Сечение балки (а) и эпюры деформации (б) и напряжений (в)

За основные неизвестные задачи примем максимальное растягивающее напряжение $\sigma_m$ и высоту сжатой зоны $x$ (рис. 2.1, б,в). Учитывая линейность эпюры напряжений, определим максимальное сжимающее напряжение в бетоне

$$\sigma_b = \frac{\sigma_m x}{h - x}. \qquad (2.8)$$

Среднее напряжение на полках примем равными их значениям на уровне центра тяжести свесов:

$$\sigma_{bc} = \frac{\sigma_m (x - h_c/2)}{h - x}, \; \sigma_{bct} = \frac{\sigma_m (h - x - h_{ct}/2)}{h - x}.$$

Напряжения в арматурах определяем по формуле (2.7):

$$\sigma_s = \sigma_{sp} + \alpha\sigma_m \frac{h - x - a}{h - x}, \; \sigma_s' = \sigma_{sp}' - \alpha\sigma_m \frac{x - a'}{h - x}. \qquad (2.9)$$

Если арматура предварительно не напряжена, то здесь соответствующее напряжение принимается равным сумме сжимающих напряжений от усадки и ползучести бетона.

Внутренние силы в сечении от предварительного натяжения арматуры являются самоуравновешенными. Напишем условие равновесия сил в сечении (рис. 2.1, в):

$$\sigma_m b(h - x)/2 + A_{ct}\sigma_{bct} + \sigma_s A_s - 0{,}5\sigma_b bx - A_c\sigma_{bc} + \sigma_s' A_s' = 0. \qquad (2.10)$$

После подстановки значений напряжений получим

$$\begin{aligned} &b(h^2 - 2hx) + A_{ct}(h - x - h_{ct}/2) + \alpha A_s(h - a - x) - \\ &- A_c(x - h_c/2) - \alpha A_s'(x - a') + (h - x)(\sigma_{sp} A_s + \sigma_{sp}' A_s')/\sigma_m = 0. \end{aligned} \qquad (2.10')$$

Запишем сумму моментов внутренних сил относительно нулевой линий:

$$\begin{aligned} &\sigma_m b(h - x)^2/3 + A_{ct}\sigma_{bct}(h - x - h_{ct}/2) + \sigma_s A_s(h - a - x) + \\ &+ \sigma_b bx^2/3 + A_c\sigma_{bc}(x - h_c/2) - \sigma_s' A_s'(x - a') = 0. \end{aligned} \qquad (2.11)$$

После подстановки значений напряжений получим

$$\sigma_m \left[ \begin{aligned} &\frac{b(h^3 - 3h^2 x + 3hx^2)}{3} + A_{ct}\left(h - x - \frac{h_{ct}}{2}\right)^2 + \\ &+ \alpha A_s(h - a - x)^2 + A_c\left(x - \frac{h_c}{2}\right)^2 + \alpha A_s'(x - a')^2 \end{aligned} \right] + (h - x)\left[\sigma_{sp} A_s(h - a - x) - \sigma_{sp}' A_s'(x - a')\right] = 0 \qquad (2.11')$$

Решая совместно уравнения (2.10') и (2.11'), можно определить высоту сжатой зоны $x$, растягивающее напряжение бетона $\sigma_m$. Далее по формулам (2.8) и (2.9) определяются максимальное сжимающее напряжение в бетоне и напряжение в арматуре.

Уравнения (2.10) и (2.11) являются общими для всех железобетонных элементов с предварительным напряжением и без них, с различными формами сечения: двутавровыми, тавровыми, прямоугольными. Для таврового сечения $A_c$ или $A_{ct}$ равняется нулю. Для прямоугольного сечения площади обоих свесов равны нулю. Так для прямоугольного сечения с напрягаемой арматурой в сжатой зоне получим

$$\sigma_m\left[b\left(h^2-2hx\right)/2-\alpha A_s'\left(x-a'\right)\right]+\sigma_{sp}'A_s'\left(h-x\right)=0,$$

$$\sigma_m\left[bh\left(h^2-3hx+3x^2\right)/3+\alpha A_s'\left(x-a'\right)^2\right]-\sigma_{sp}'A_s'\left(h-x\right)\left(x-a'\right)=0.$$

Из первого уравнения находим

$$\sigma_m=\mu\sigma_{sp}'\left(h-x\right)/\left[\alpha\mu\left(x-a'\right)+x-h/2\right]. \qquad (2.12)$$

Подставив это выражение во второе уравнение находим

$$x=h\left(2h-3a'\right)/\left(3h-6a'\right). \qquad (2.13)$$

Сравним существующий и предлагаемый методы решения задачи. Для этого рассмотрим прямоугольное сечение размерами $b=15,3$ см, $h=30.1$ см с напрягаемой одиночной арматурой в сжатой зоне: $A_s'=4$ см$^4$, $\sigma_{sp}'=112,5$ *МПа*, $a'=2,8$ см. Модули упругости материалов: $E=3.25\cdot10^4$ *МПа*, $E_s=2.1\cdot10^5$ *МПа*. При этих данных: $\mu=8,75\cdot10^{-3}$, $\alpha=6,45$, $\alpha\mu=0,056$.

Расчет по формулам (2.12) и (2.13) дает $x=21,2$ *см*, $\sigma_m=1,23$ *МПа*.

Далее по формулам (2.8) и (2.9) получим $\sigma_b=2,91$ *МПа* , $\sigma_s'=96,1$ *МПа*.

Расчет общепринятому методу дает: $A=483$ *см*$^2$, $y_0=14,25$ см, $I_r=35669$ *см*$^4$. По формулам (2.2) и (2.3) имеем $P=45,34$ *кН*, $e_{op}=y_0-a'=11,25$ см.

Далее по формуле (2.6) находим максимальные сжимающие $(y = y_0)$ растягивающие $(y = h - y_0)$ напряжения $\sigma_b = 3,01\ МПа, \sigma_m = 1,37\ МПа.$ Напряжение в арматуре не определяется.

Для оценки точности полученных результатов эта задача была решена в линейной постановке с помощью программа ЛИРА-САПР. Результаты расчетов:

$$\sigma_b = 2,84\ МПа,\ \sigma_m = 1,16\ МПа,\ \sigma_s = \frac{N_a}{A_s} = \frac{3,84 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-4}} = 96\ МПа.$$

Отсюда видно, что эти результаты достаточно близко к тем, что получено предлагаемым методом.

### 2.1.3 Нелинейный расчет предварительно напряженных балок

Линейный расчет железобетонных элементов можно вести при невысоких уровнях напряжений, когда они не превышают 70% от расчетных. Если в сечении элемента не возникает трещина, то можно быть уверенным, что это условие выполняется для сжатой зоны. Такая ситуация характерна для определения напряжений обжатия. Вместе с тем в бетоне растянутой зоны могут возникнуть неупругие деформации. Поэтому для диаграммы деформирования в этой зоне примем экспоненциальный закон, который заложен в программе ЛИРА-САПР

$$\sigma = 1,1 R_{bt} \left[ 1 - \exp \frac{\left( -0,9 \varepsilon E_b \right)}{R_{bt}} \right]. \qquad (2.14)$$

В расчетах будем исходить из следующих положений:

1) сечения при обжатии остаются плоскими;
2) в бетоне сжатой зоны деформации только упругие, эпюра напряжений треугольная;
3) в бетоне растянутой зоны связь между напряжением и деформацией описывается экспоненциальным законом (2.14).

Рассмотрим сечение, показанное на рисунке 2.1, а. Эпюры деформаций и напряжений имеют прежний вид за исключением того, что в растянутой зоне будет криволинейной.

За основные неизвестные задачи как и прежде примем высоту сжатой зоны $x$ и максимальное растягивающее напряжения в бетоне $\sigma_m$. По диаграмме деформирования найдем соответствующую деформацию

$$\varepsilon_m = -\left( \frac{R_{bt}}{0,9 E_b} \right) \ln \left( 1 - \frac{\sigma_m}{1,1 R_{bt}} \right).$$

Введем обозначения

$$c = \sigma_m / 1{,}1 R_{bt}, \quad y = -\ln(1-c). \tag{2.15}$$

Тогда краевые деформации будут равны

$$\varepsilon_m = 1{,}1 y R_{bt} / E_b, \quad \varepsilon_b = \varepsilon_m x / (h - x). \tag{2.16}$$

Максимальное сжимающее напряжение в бетоне

$$\sigma_b = E_b \varepsilon_b = 1{,}1 y R_{bt} x / (h - x). \tag{2.17}$$

Среднее напряжение на полке сжатой зоны примем равным значению на уровне центра тяжести свесов:

$$\sigma_{bc} = 1{,}1 y R_{bt} (x - h_c/2) / (h - x).$$

Ввиду криволинейного характера эпюры напряжение в пределах растянутой полки изменяется незначительно и можно принять его равным краевому значению:

$$\sigma_{bct} = \sigma_m.$$

Согласно формуле (2.7) определим напряжение в арматурах

$$\sigma_s = \sigma_{sp} + \alpha \sigma_m, \; \sigma_s' = \sigma_{sp}' - 1{,}1 y \alpha R_{bt} (x - a') / (h - x). \tag{2.18}$$

Высоту растянутой зоны обозначим $z_p = h - x$ и деформацию слоя, отстоящего на расстоянии $z$ от нулевой линии (2.2, в), запишем так

$$\varepsilon = \varepsilon_m z / z_p.$$

Тогда диаграмму деформирования можно переписать так

$$\sigma = 1{,}1 R_{bt} \left[ 1 - \exp\left( \frac{-yz}{z_p} \right) \right].$$

Найдем равнодействующую внутренних сил в растянутой зоне бетона (рис. 2.2, в).

$$N_p = b\int_0^{z_p}\sigma\,dz = 1{,}1R_{bt}b\int_0^{z_p}\left[1-\exp\left(\frac{-yz}{z_p}\right)\right]dz.$$

После интегрирования получим

$$N_p = 1{,}1bR_{bt}\left(h-x\right)\left(1-c/y\right). \qquad (2.19)$$

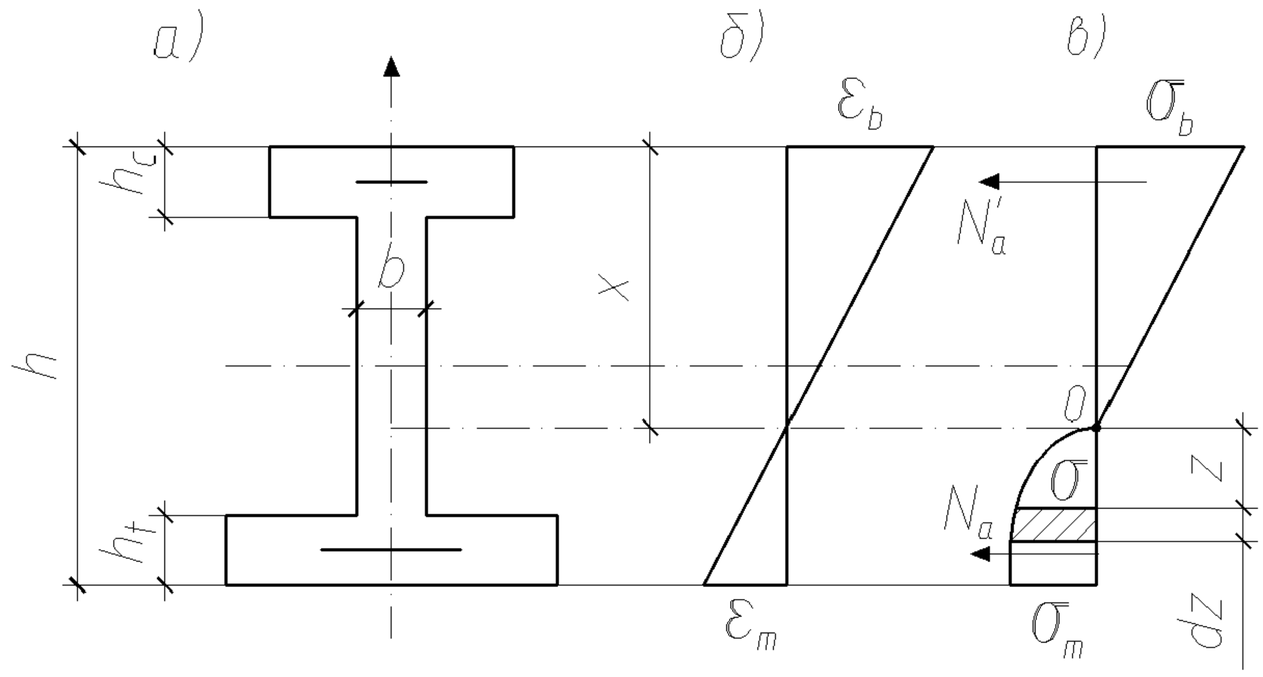



Рисунок 2.2 – Сечение балки (а) с нелинейной эпюрой напряжений

Найдем момент этих сил относительно нулевой линии (рис. 2.2, в)

$$M_{po} = b\int_0^{z_p}\sigma z\,dz = 1{,}1R_{bt}b\int_0^{z_p} z\left[1-\exp\left(-yz/z_p\right)\right]dz.$$

После интегрирования получим

$$M_{po} = 1{,}1R_{bt}bz_p^2\left[0{,}5+\left(1-c\right)\left(1+y\right)/y^2-y^{-2}\right]. \qquad (2.20)$$

Уравнения равновесия сил в сечении имеет вид (2.10) с заменой первого слагаемого на $N_p$. Подставив туда определенные выше напряжения и силу (2.19), получим

$$1{,}1R_{bt}\left\{b(h-x)\left(1-\frac{c}{y}\right)+A_{ct}c+\alpha A_s c-y\frac{bx^2/2+A_c(x-h_c/2)+\alpha A'_s(x-a')}{h-x}\right\}+\sigma_{sp}A_s+\sigma'_{sp}A'_s=0.$$

Уравнения моментов относительно нулевой линии имеет вид (2.11) с заменой первого слагаемого на $M_{po}$. Подставляя туда новые значения напряжений, получим

$$1{,}1R_{bt}\left\{\begin{array}{l} b(h-x)^2\left[0{,}5+(1-c/y)-\dfrac{c}{y^2}\right]+A_{ct}c(h-x-h_{ct}/2)+ \\ +c\alpha A_s(h-a-x)+y\dfrac{bx^3/3+A_c(x-h_c/2)^2+\alpha A_s'(x-a')^2}{h-x}\end{array}\right\}+\sigma_{sp}A_s(h-a-x)+\sigma_{sp}'A_s'(x-a')=0.$$

Введем безразмерные параметры

$$\xi=\frac{x}{h},\ a_0=\frac{a}{h},\ a_0'=\frac{a'}{h},\ m_{ct}=\frac{A_{ct}}{bh},\ m_c=\frac{A_c}{bh}.$$

и перепишем эти уравнения в безразмерном виде

$$(1-\xi)\left(1-\frac{c}{y}\right)+c(m_{ct}+\alpha\mu)-y\frac{\xi^2/2+m_c(\xi-h_c/2h)+\alpha\mu'(\xi-a_0')}{1-\xi}+\frac{\mu\sigma_{sp}+\mu'\sigma_{sp}'}{1{,}1R_{bt}}=0,\quad (2.21)$$

$$\begin{array}{l}(1-\xi)^2\left[0{,}5+\left(\dfrac{1-c}{y}\right)-\dfrac{c}{y^2}\right]+cm_{ct}\left(1-\xi-\dfrac{h_{ct}}{2h}\right)+c\alpha\mu(1-\xi-a_0)+ \\ +y\dfrac{\xi^3/3+m_c(\xi-h_c/2h)^2+\alpha\mu'(\xi-a_0')^2}{1-\xi}+\dfrac{\mu\sigma_{sp}(1-\xi-a_0)-\mu'\sigma_{sp}'(\xi-a_0')}{1{,}1R_{bt}}=0.\end{array}\quad (2.22)$$

Получили систему двух трансцендентных уравнений относительно двух неизвестных $\xi, y\,(c)$. Решение системы дает возможность найти высоту сжатой зоны $x=\xi h$ и максимальное растягивающее напряжение в бетоне $\sigma_m=1{,}1R_{bt}c$. Через эти параметры определяются максимальное сжимающее напряжение в бетоне по формуле (2.17) и напряжения в арматуре по формулам (2.18).

Разрешающие уравнения (2.21) и (2.22) записаны в самом общем виде и упрощаются для частных случаев. Так для прямоугольного сечения с арматурой в сжатой зоне они запишутся так:

$$(1-\xi)\left(1-\frac{c}{y}\right)-y\frac{\xi^2/2+\alpha\mu'(\xi-a_0')}{1-\xi}+\frac{\mu'\sigma_{sp}'}{1{,}1R_{bt}}=0,\quad (2.21')$$

$$(1-\xi)^2\left[0{,}5+\left(\frac{1-c}{y}\right)-\frac{c}{y^2}\right]+y\frac{\xi^3/3+\alpha\mu'(\xi-a_0')^2}{1-\xi}-\frac{\mu'\sigma_{sp}'(\xi-a_0')}{1{,}1R_{bt}}=0.\quad (2.22')$$

Существует множество способов решения системы нелинейных алгебраических уравнений и соответствующих алгоритмов и программ их реализации.

В нашем случае двух переменных решение можно найти графически: построить на плоскости $\xi, y$ кривые $\varphi_1(\xi, y) = 0$ и $\varphi_2(\xi, y) = 0$ и найти точки их пересечения. При построении кривых надо учесть, что переменные меняются в следующих пределах:

$$0 < \xi < 1,\ 0 < \mathsf{y} < -\ln 0,909 = 2,4$$

Для численного решения этих уравнений разработаны различные итерационные методы: метод простых итерации, метод Ньютона, метод спуска. Изложим метод простых итераций.

Уравнения (2.21') и (2.22') представим в виде

$$\xi = 1 - \frac{\mathsf{y}\left[\xi^2/2 + \alpha\mu'\left(\xi - \mathsf{a}_0'\right)\right]/\left(1-\xi\right) - \mu'\sigma_{sp}'/1{,}1\mathsf{R}_{bt}}{1 + \left(\mathsf{e}^{-\mathsf{y}} - 1\right)/\mathsf{y}} = \mathsf{f}_1(\xi, \mathsf{y}), \tag{2.23}$$

$$\mathsf{y} = \frac{\left(1-\xi\right)\left(\xi - \mathsf{a}_0'\right)\mu'\sigma_{sp}'/1{,}1\mathsf{R}_{bt} - \left(1-\xi\right)^3\left[0{,}5 + \left(1+\mathsf{y}\right)\mathsf{e}^{-\mathsf{y}}/\mathsf{y}^2 - \mathsf{y}^{-2}\right]}{\alpha\mu'\left(\xi - \mathsf{a}_0'\right)^2 + \xi^3/3} = \mathsf{f}_2(\xi, \mathsf{y}),$$

Выберем некоторое нулевое приближение. В таком качестве удобно принимать линейное решение, которое приведено в §2.1.2. Дальнейшие приближения найдем по формулам

$$\xi_{i+1} = \mathsf{f}_1(\xi_i, \mathsf{y}_i),\ \mathsf{y}_{i+1} = \mathsf{f}_2(\xi_i, \mathsf{y}_i). \tag{2.24}$$

Итерации прекращаем при выполнении критерия сходимости для каждой переменной

$$\frac{\left(\mathsf{x}_i - \mathsf{x}_{i-1}\right)^2}{\left|2\mathsf{x}_{i-1} - \mathsf{x}_i - \mathsf{x}_{i-2}\right|} < \varepsilon,$$

где $\varepsilon$ – допустимая погрешность решения.

Разработаны множество программ, реализующих итерационные методы и их модификации, улучшающие сходимость процесса. Они интегрированы в известные пакеты прикладных программ: Mathcad, Matlab, Ansys, Лира и т.д. Такие программы составить несложно и самому пользователю.

Этим методом определим напряжения в железобетонной балке прямоугольного сечения, рассмотренной в предыдущем параграфе. Вычислим безразмерные параметры системы (2.23).

$$a_0' = 2,8 / 30,1 = 0,093;\ \alpha\mu' = 0,056 \quad \text{(см. §2.1.2)};$$
$$m = \mu'\sigma_{sp}' \big/ 1,1R_{bt} = 8,75 \cdot 10^{-3} \cdot 112,5 \big/ 1,1 \cdot 2,1 = 0,426.$$

В качестве нулевого приближения принимаем линейной решение:

$$\xi_0 = 21,2/30,1 = 0,704;\ y_0 = -\ln\left(1 - 1,23/1,1 \cdot 2,1\right) = 0,76.$$

Систему (2.23) решаем методом простых итерации с погрешностью $\varepsilon = 0,001$ и получаем:

$$\xi = 0,673, \quad y = 0,606.$$

Отсюда определяем

$$c = 1 - e^{-y} = 0,455, \quad \sigma_m = 1,1 \cdot 2,1 \cdot 0,455 = 1,05\ МПа,$$

$$\sigma_b = \frac{1,1 \cdot 2,1 \cdot 0,606 \cdot 0,673}{\left(1 - 0,673\right)} = 2,88\ МПа,$$

$$\sigma_s' = 112,5 - 1,1 \cdot 2,1 \cdot 0,606 \cdot 6,45\left(0,673 - 0,093\right) \big/ \left(1 - 0,673\right) = 96,5\ МПа.$$

Для оценки результатов решения эта задача была решена с помощью программы ЛИРА в нелинейной постановке. В результате решения получено:

$x = 20,7\ см\ \ (\xi = 0,688),\ \sigma_m = 1,0\ МПа,\ \sigma_b = -2,8\ МПа,\ N_a = 36,8\ кН,$ или

$\sigma_s = 36,8 \cdot 10^{-3} / 4 \cdot 10^{-4} = 91,9\ МПа.$

Разница в результатах не превышает 5%.

Этот метод расчета справедлив, когда в сечении элемента нет трещины. Поэтому найдем значение предварительного напряжения в арматуре, при котором появляется трещина. Трещина образуется тогда, когда максимальное растягивающее напряжение в бетоне достигнет предела прочности на растяжение, то есть $\sigma_m = R_{bt}$.

По диаграмме деформирования (2.14) найдем предельную деформацию бетона на растяжение

$$\varepsilon_{ubt} = 2,667 R_{bt} / E_b. \qquad (2.25)$$

Используя формулы (2.16) и (2.17), найдем напряжение на краю сжатой зоны

$$\sigma_b = 2,667 R_{bt} x/(h-x).$$

Средние напряжения на полках будут равны

$$\sigma_{bc} = \frac{2,667 R_{bt}(x - h_c/2)}{h-x}, \quad \sigma_{bct} = R_{bt}.$$

С учетом предельной деформации (2.25) запишем в арматурах

$$\sigma_s = \sigma_{sp} + \alpha R_{bt}, \quad \sigma'_s = \sigma'_{sp} - 2,667\alpha R_{bt}(x - a')/(h-x).$$

По аналогии с вышеизложенным распределением напряжения по высоте зоны растяжения можно записать так

$$\sigma = 1,1 R_{bt}\left[1 - \exp(-2.4 z/z_p)\right].$$

Тогда равнодействующую внутренних сил в растянутой зоне и их момент относительно нулевой линии можно найти по формулам (2.19) и (2.20), полагая в них $y = 2,4,\ c = 0,909.$ В итоге получаем:

$$N_p = 0,683 b R_{bt}(h-x), \quad M_{po} = 0,418 R_{bt} b(h-x)^2. \qquad (2.26)$$

Запишем уравнение равновесия внутренних сил в сечении и сумму их моментов относительно нулевой линий (рис. 2.2).

$$N_p + A_{ct} R_{bt} + N_a - 0,5\sigma_b x b - A_c \sigma_{bc} + N'_a = 0,$$

$$M_{po} + A_{ct} R_{bt}(h - x - h_{ct}/2) + N_a(h - x - a) + \sigma_b b x^2/3 + A_c \sigma_{bc}(x - h_c/2) - N'_a(x - a') = 0.$$

Подставляя сюда выше определенные напряжения, силы и момент, запишем

$$R_{bt}\left\{\begin{array}{l} 0,683 b(h-x) + A_{ct} + \alpha A_s - [1,333 b x^2 + \\ +2,667 A_c(x - h_c/2) + 2,667\alpha A'_s(x - a')]/(h-x) \end{array}\right\} + \sigma_{sp} A_s + \sigma'_{sp} A'_s = 0, \quad (2.27)$$

$$R_{bt}\left\{\begin{array}{l}0,418b(h-x)^2+A_{bt}(h-x-h_{ct}/2)+\alpha A_s(h-x-a)+\\ +\dfrac{0,889bx^3+2,667A_c(x-h_c/2)^2+2,667A_s'(x-a')^2}{h-x}\end{array}\right\}+\sigma_{sp}A_s(h-x-a)-\sigma_{sp}'A_s'(x-a')=0. \quad (2.28)$$

Эти уравнения позволяют определить предельное значение предварительного напряжения. Обычно напрягаемую арматуру ставят только в зонах растягивающих напряжений при эксплуатационных нагрузках. Тогда $\sigma'_{sp}=0$ и из уравнения (2.27) можно выразить силу $\sigma_{sp}A_{sp}$ через $x$. Подставляя это выражение в (2.28), получаем кубическое уравнение для определения высоты сжатой зоны перед образованием трещины. Далее из (2.27) при известном $x$ определяется предельное предварительное напряжение.

Если есть необходимость ставить напрягаемую арматуру и в сжатой зоне, то напряжение в ней следует задать в долях от $\sigma_{sp}$ ($\sigma'_{sp}=m\sigma_{sp}$). Далее определение предельного напряжения производится по вышеизложенной методике.

Предварительное натяжение арматуры должно быть ограничено так, чтобы при обжатии бетона в нем не образовалась трещина. До сих пор надежных методов определения предельного предварительного напряжения не было. Исходя из опыта эксплуатации нормы рекомендуют, чтобы предварительное напряжение не превосходило 80% расчетного сопротивления арматуры. Мы рекомендуем принимать его не более 80% от предельного предварительного напряжения.

Для прямоугольного сечения с напрягаемой арматурой в сжатой зоне разрешающие уравнения запишутся так:

$$R_{bt}\left\{0,683b(h-x)-\left[1,333bx^2+2,667\alpha A_s'(x-a')\right]/(h-x)\right\}+\sigma_{sp}'A_s'=0,$$

$$R_{bt}\left\{0,4188b(h-x)^2+\left[0,889bx^3+2,667\alpha A_s'(x-a')^2\right]/(h-x)\right\}\sigma_{sp}'A_s'(x-a')=0.$$

Отсюда для определения высоты сжатой зоны получаем следующее кубическое уравнение:

$$x^3+(0,626h-3,63a')x^2+(3,19h^2-7,63ha')x+3,816h^2a'-2,335h^3=0.$$

Для ранее рассмотренного прямоугольного сечения это уравнение в безразмерном виде перепишется так:

$$\xi^3+0,288\xi^2+2,48\xi-1,98=0.$$

Отсюда $\xi = 0,643$, а $\sigma_{sp}^{'} A_s^{'} = 147,6\ кН$. Предельное предварительное напряжение

$$\sigma_{sp}^{'} = 147,6 \cdot 10^{-3} / 4 \cdot 10^{-4} = 366\ МПа.$$

2.1.4 Определение предварительных напряжений с помощью ПК ЛИРА

Моделирование предварительного напряжения железобетонных конструкции является достаточно сложной проблемой, так как требует трехмерной или в простых случаях двухмерной постановки задачи. Очень простой и достаточно эффективный прием моделирования этой задачи с помощью стержневого элемента предложен в [7]. Он основан на использовании жестких вставок, обеспечивающих плоское деформирование поперечных сечений. При этом деформации в напрягаемой арматуре принимаются равными.

$$\varepsilon = \varepsilon_s - \varepsilon_0,$$

где $\varepsilon_0$ – деформации, вызванные предварительным напряжением с учетом всех потерь к моменту нагружения.

Предварительную деформацию в арматуре можно задать в виде температурного воздействия. Тогда разность температур, вызывающая эквивалентные деформации в арматуре, определяется по формуле

$$\Delta t = \varepsilon / \alpha_t = \sigma_{sp} / \alpha_t E_s, \qquad (2.29)$$

где $\alpha_t$ – коэффициент температурного расширения стали.

Эквивалентность же деформационного воздействия в железобетонных конструкциях обеспечивается с помощью жестких вставок, позволяющих смоделировать гипотезу плоских сечений. В предложенном приеме моделируется сжатие вдоль оси бетона и растяжение арматуры, что соответствует реальному напряженно-деформированного состоянию внецентренному сжатию железобетонных элементов и растяжению предварительно напрягаемой арматуры.

Для моделирования предварительных напряжений введем в схему дополнительные элементы. Для этого с помощью диалогового окно **«Добавить элемент»** добавим арматурный стержень. Далее с использованием ниспадающего меню **«Выбор → Отметка блока"** выделим один из конечных элементов (он поменяет цвет). Затем из ниспадающего меню **«Жесткости → Жесткие вставки»** вызываем диалоговое окно **«Жесткие вставки»**. Это окно предназначено для задания жестких вставок в начале и конце стержня. Для концов стержня в соответствующих полях вводятся размеры жестких вставок

вдоль местных осей (оси z). Далее указываем площадь сечения арматуры, а в ее узлах задаем разность температур, вычисленный по формуле (2.29).

Таким образом, алгоритм определения напряжений в сечений железобетонных элемента от предварительного напряжения в арматуре будет следующим.

1. Создание новой задачи

Войти в программу ЛИРА-САПР и открыть меню **Приложения**, выбрать пункт **Новый**. В появившемся диалоговом окне **Описание схемы** задать следующие параметры:

- имя задачи;
- в раскрывающемся списке **Признак схемы**, выбрать **Три степени свободыв узле**.

Далее щелкнуть по кнопке**Подтвердить**.

2. Создание геометрической схемы балки

На панели инструментов **Создание и редактирование** последовательно пройти**Создание → Генерация регулярных фрагментов → Создание плоских фрагментов и сетей**.

В открывшемся диалоговом окне задать шаг вдоль первой оси (**L**) и число шагов (**N**). Далее кнопка **Применить**. Для сохранения информации о расчетной схеме открыть меню **Приложение** и выбрать кнопку **Сохранить**.

3. Задание граничных условий

3.1. Вывод на экран номеров и узлов и элементов:

- на панели инструментов **Панель выбора →флаги рисования**;
- в диалоговом окне **Показать** активизировать закладку **Элементы** и установить флажок **Номера элементов**;
- перейти в закладку **Узлы**и установить флажок **Номера узлов**;
- кнопка**Перерисовать.**

3.2. Выделение узлов:

- на панели инструментов **Панель выбора** в раскрывающемся списке **Отметка узлов** щелкнуть по кнопке **Отметка узлов**;
- курсором выделить узел (он будет красным).

3.3. Задание граничных условий в узле:

- на панели инструментов **Создание и редактирование** вызвать **жесткость и связи →связи**;
- в появившемся диалоговом окне **Связи в узлах** с помощью установки флажков отметить направления, по которым запрещены перемещения узлов **(x,z)**;
- кнопка **Применить** (узел становится синим).

3.4. Задание граничных условий в следующем узле:

- выделить курсором следующий узел;
- в диалоговом окне **Связи в узлах** задать граничные условия;

- кнопка **Применить**.

4. Задание жесткостных параметров элементам балки

4.1. Формирование типов жесткости

4.1.1. Панель инструментов **Создание и редактирование →жесткости и связи →жесткости и материалы элементов**.

4.1.2. В появляющемся диалоговом окне кнопкой **Добавить** вызвать диалоговое окно **Добавить жесткость**, появится список стандартных типов сечений.

4.1.3. Двойным щелчком мыши на наружном элементе графического списка выбрать тип сечения: **Брус**.

4.1.4. В диалоговом окне **Задание стандартного сечения** вводятся геометрические размеры сечения.

4.2. Задание материала

4.2.1. Установить флажок **Учет нелинейности.**

4.2.2. Кнопкой **Параметры материала** вызывается диалоговое окно**Законы нелинейного деформирования материалов.**

4.2.3. В этом окне в раскрывающемся списке выбираем закон деформирования бетона: мы выбрали строку**25-экспоненциальный (нормативная прочность) закон**.

4.2.4. В таблице **Параметры закона нелинейного деформирования** двойным щелчком по ячейке выбираем характеристики бетона: класс (**В 40**), тип (**ТБ**). При этом значения предельных напряжений и деформации на растяжение и сжатие, а также модуль упругости появятся в таблице. Если нажать рядом кнопку **Нарисовать**, то появится и график закона.

4.2.5. В этом же окне можно установить флажок **Учитывать армирующий материал** и перейти на закладку **Армирующий материал**.

4.2.6. В раскрывающем списке **Законы нелинейного деформирования** выбрать закон деформирования арматуры: мы выбрали строку **14-кусочно-линейный закон деформирования.**

4.2.7. В таблице **Параметры закона нелинейного деформирования** задаются деформации и напряжения в отдельных точках диаграммы. Здесь также с помощью кнопки **Нарисовать**можно посмотреть график выбранного закона.

4.2.8. Для ввода данных кнопка**Подтвердить.**

4.3. Задание расположения и площади арматуры

4.3.1. В диалоговом окне **Задание стандартного сечения** нажать кнопку **Параметры арматуры**, появляется диалоговое окно**Характеристики физической нелинейности стержней.**

4.3.2. В этом окне выбирается тип арматурных включений: мы выбрали **Точечная арматура**.

4.3.3. В соответствующих полях задаются параметры арматуры первого слоя: площадь и координаты привязки.

4.3.4. В раскрывающемся списке **Номер слоя арматуры** выбирается номер следующего слоя (если есть) и задаются ее параметры.

4.3.5. Кнопкой **Дробление на элементарные полосы** выбирается тип дробления поперечного сечения и количество полос.

4.3.6. Чтобы увидеть эскиз сечения нажать на кнопку**Нарисовать.**
4.3.7. Кнопка**Подтвердить.**
4.4. Назначение жесткостей элементам балки:
- Панель инструментов **Создание и редактирование→жесткости и связи→жесткости и материалы элементов**:
- в появляющемся диалоговом окне в списке текущего типа жесткости должен быть установлен выбранный тип жесткости:
1. **Брус** с ранее введенными размерами;
- курсором выделить все элементы;
- в открытом диалоговом окне нажать кнопку**Применить.**
- далее может появитьсяокно сообщения о замене линейного типа конечного элемента (по умолчанию КЭ 10) на нелинейный (по умолчанию КЭ 210), в котором следует нажать кнопку **Да.**

В версиях ниже ЛИРА-САПР – 2017 смена конечного элемента производится так:
- через **Панель выбора→отметка горизонтальных стержней** курсором выделяются все элементы балки;
- на вкладке **Расширение и редактирование** панели **Схема** кнопкой **Смена типа конечного элемента** вызываем диалоговое окно **Смена типа конечного элемента**;
- в этом окне в списке типов конечных элементов выделяем строку **Тип 210**;
- кнопка **Применить**.

При расчете предварительных напряжений арматуру можно не задавать, так как она задается в дальнейшем через жесткую вставку. В этом случае пропускаются подпункты 4.2.5-4.2.8 и пункт 4.3.

5. Задание нагрузки

При определении предварительных напряжений в балке нагрузкой является предварительное напряжение в арматуре. Оно задается путем температурного воздействия на арматурный стержень, введенный через жесткую вставку. Эта процедура описана выше.

**6.** Физически нелинейный расчет балки: меню **Режим,** кнопка**Выполнить полный расчет.**

**7.** Просмотр и анализ результатов расчета

7.1. Меню **Режим**, кнопка **Результаты расчета→Визуализация результатов расчета.**
7.2. По умолчанию расчетная схема отображается с учетом перемещений узлов. Для просмотра без перемещений нажать кнопку **Исходная схема.**
7.3. Для просмотра информации о напряженном состоянии в одном из элементов надо на панели инструментов найти **Панель выбора**, нажать кнопку **Информация об узле или элементе**, и выделить курсором нужный элемент.

7.4. В появившемся диалоговом окне **Информация об элементе** для отображения характеристик сечения с трещинами установить флажок **Трещины.**

7.5. Появится окно **Характеристики сечения с трещинами**. В нем будут показаны эпюры деформаций и напряжений по высоте сечения. Рядом будет таблица, в которой приведены все характерные абсциссы и ординаты эпюр:

- наибольшие (краевые) деформации на растяжение и сжатие;
- максимальное сжимающее и растягивающее напряжение в бетоне;
- положение нулевой линии;
- длина трещины (если есть), ширина ее раскрытия и шаг трещин.

7.6. Чтобы узнать информацию по арматурам в этом же окне надо нажать кнопку **1,2** в левом верхнем углу. Появится таблица, в которой будет введенная вся информация по арматурам, а также возникающее усилие в каждой арматуре.

Через кнопку **Информация об узле или элементе** (п.7.3.) доступны также информация о внутренних усилиях в сечениях балки, о перемещении различных узлов, в том числе значение максимального прогиба в балке.

По этому алгоритму проведен расчет ранее рассмотренных железобетонных элементов прямоугольного сечения при предварительном напряжений $\sigma_{sp} = 112,5 МПа$ в линейной постановке и с учетом физической нелинейности, описываемой экспоненциальным законом деформирования. Результаты расчетов приведены в параграфах §2.1.2 и §2.1.3 и сравнивались с результатами соответствующих приближенных аналитических решений с целью оценки их точности.

### 2.1.5 Регрессионные зависимости для предварительных напряжений

По результатом анализа многочисленных расчетов определено влияние различных факторов на параметры напряженного состояния при обжатии бетона от предварительного натяжения арматуры. Кроме класса бетона такими основными параметрами для балки прямоугольного сечения являются: предварительное напряжение в арматуре $\sigma_{sp}$, размеры сечения h, b, процент армирования $\mu$ модуль упругости бетона E.

Для вывода регрессионных зависимостей параметров напряженного состояния от этих факторов проведем многофакторный рационально планируемый компьютерный эксперимент с помощью ПК ЛИРА. Эта программа предназначена для проведения нормативных расчетов и физико-механические характеристики бетонов различных классов и марок заложены уже в программе в законах изменения диаграммы деформирования. В связи с этим варьировать ими на произвольных уровнях мы не можем, поэтому эксперименты будем проводить для различных классов бетона и арматуры.

В качестве варьируемых параметров выбираем вышеуказанные пять параметров. Предварительное напряжение будем менять от 80 *МПа* до 0,8 $R_s$ (по нормам). Для арматуры класса AIII ($R_s$= 370 *МПа*) это296 *МПа*. Предельные размеры сечения из практики применения балок прямоугольного сечения: $h = (10 \div 50)$ *см*, $b = (5 \div 40)$ *см*.

Существует минимальный и максимальный процент армирования, которые зависят от классов бетона и арматуры. Реальные значения этого параметра независимо от классов материалов при изгибе рекомендуется в пределах от 0,1 до 5 процентов. В эксперименте примем $\mu = (0{,}5 \div 4{,}5)\%$.

Модули упругости бетона зависят от типа бетона. Исходя из нормативных значений для бетона В40 его будем менять от 20500 до 36500 МПа, а для бетона В25 от 18000 до 30000 МПа.

Варьируемых параметров пять. При рациональном планировании их будем менять на пяти равностоящих уровнях. Значения варьируемых параметров на различных уровнях приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Значения варьируемых параметров на различных уровнях

| Уров-ни | Значения переменных | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | t ($\sigma_p$, МПа) | h, см | b, см | μ, % | E (B40),Марка, | | E (B25) |
| 1 | 32(80) | 10 | 5 | 0,5 | 20500 | Л1800 | 18000 |
| 2 | 52(130) | 20 | 14 | 1,5 | 24500 | МАТ | 21000 |
| 3 | 72(180) | 30 | 23 | 2,5 | 28500 | МА | 24000 |
| 4 | 92(230) | 40 | 32 | 3,5 | 32500 | ТБ | 27000 |
| 5 | 112(280) | 50 | 41 | 4,5 | 36500 | ТА | 30000 |

Составление матрицы рационального планирования изложено в параграфе 1.5. Согласно этой матрице эксперимент будет состоять из 25 опытов. Исходные данные для каждого эксперимента с учетом данных таблицы 2.1 приведеныв таблицах 2.2 и 2.3 (первые 6 столбцов).

Каждая строка этих таблиц представляет собой один опыт – расчетная задача в ПК ЛИРА. В результате расчета определяем максимальные растягивающие и сжимающие ($\sigma_t, \sigma_b$) напряжения и деформации ($\varepsilon_p$, $\varepsilon_c$) в бетоне, высоту сжатой зоны (x) и напряжение в арматуре $\sigma_s$.

Результаты расчетов, полученные с помощью ПК ЛИРА, приведены в таблице 2.2 (столбцы 5÷12) для бетона В40 и в таблице 2.3 для бетона В25.

Таблица 2.2 – Матрица планирования и результаты компьютерных экспериментов для бетона В25

| № | -t ($\sigma_{sp}$) | h,см | b,см | $\mu/A_s$,см$^2$ | E,МПа | X,см | $\sigma_b$,МПа | $\sigma_t$,МПа | $10^3\varepsilon_c$ | $10^3\varepsilon_p$ | $N_a$, кН |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 32 (80) | 20 | 23 | 3,5 /16,1 | 30000 | 13,7 | 3,1 | 1,0 | 0,11 | 0,05 | 41,29 |
| 2 | 52 (130) | 30 | 32 | 4,5 /43,2 | 18000 | 20,1 | 4,3 | 1,3 | 0,257 | 0,126 | 116,85 |
| 3 | 72 (180) | 40 | 41 | 0,5 /8,2 | 21000 | 27,2 | 2,3 | 0,8 | 0,114 | 0,053 | 106,82 |
| 4 | 92 (230) | 50 | 5 | 1,5 /3,75 | 24000 | 32,4 | 5,5 | 1,4 | 0,263 | 0,143 | 37,6 |
| 5 | 112 (280) | 10 | 14 | 2,5 /3,5 | 27000 | 6,9 | 8,5 | 1,6 | 0,408 | 0,187 | 38,96 |
| 6 | 32 (80) | 30 | 41 | 1,5/18,5 | 27000 | 20,6 | 2,2 | 0,8 | 0,085 | 0,039 | 76,83 |
| 7 | 52 (130) | 40 | 5 | 2,5 /5,0 | 30000 | 26,5 | 4,2 | 1,3 | 0,155 | 0,079 | 23,36 |
| 8 | 72 (180) | 50 | 14 | 3,5/24,5 | 18000 | 6,7 | 18,5 | 1,76 | - | - | 104,36 |
| 9 | 92 (230) | 10 | 23 | 4,5/10,4 | 21000 | 7,1 | 7,9 | 1,5 | 0,47 | 0,191 | 62,54 |
| 10 | 112 (280) | 20 | 32 | 0,5 /3,2 | 24000 | 13,6 | 3,6 | 1,1 | 0,162 | 0,076 | 65,94 |
| 11 | 32 (80) | 40 | 14 | 4,5/25,2 | 24000 | 27,1 | 3,0 | 1,0 | 0,132 | 0,063 | 46,52 |
| 12 | 52 (130) | 50 | 23 | 0,5/5,75 | 27000 | 34,2 | 1,8 | 0,7 | 0,069 | 0,032 | 57,53 |
| 13 | 72 (180) | 10 | 32 | 1,5 /4,8 | 30000 | 7,2 | 4,7 | 1,2 | 0,177 | 0,070 | 48,84 |
| 14 | 92 (230) | 20 | 41 | 2,5/20,5 | 18000 | 7,0 | 9,4 | 1,5 | 0,693 | 1,301 | 139,12 |
| 15 | 112 (280) | 30 | 5 | 3,5 /5,25 | 21000 | 4,6 | 18,5 | 1,76 | - | - | 26,77 |
| 16 | 32 (80) | 50 | 32 | 2,5 /40 | 21000 | 33,9 | 2,5 | 0,9 | 0,121 | 0,057 | 110,08 |
| 17 | 52 (130) | 10 | 41 | 3,5/14,4 | 24000 | 7,3 | 4,6 | 1,2 | 0,217 | 0,082 | 63,24 |
| 18 | 72 (180) | 20 | 5 | 4,5 /4,5 | 27000 | 13,1 | 6,4 | 1,5 | 0,286 | 0,149 | 18,66 |
| 19 | 92 (230) | 30 | 14 | 0,5 /2,1 | 30000 | 20,4 | 3,1 | 1,0 | 0,11 | 0,052 | 36,5 |
| 20 | 112 (280) | 40 | 23 | 1,5/13,8 | 18000 | 4,7 | 18,5 | 1,76 | - | - | 145,16 |
| 21 | 32 (80) | 10 | 5 | 0,5/0,25 | 18000 | 7,3 | 1 | 0,3 | 0,055 | 0,02 | 1,62 |
| 22 | 52 (130) | 20 | 14 | 1,5 /4,2 | 21000 | 13,7 | 3,2 | 1,02 | 0,16 | 0,074 | 25,92 |
| 23 | 72 (180) | 30 | 23 | 2,5/17,3 | 24000 | 19,7 | 5,3 | 1,4 | 0,252 | 0,131 | 102,44 |
| 24 | 92 (230) | 40 | 32 | 3,5 /44,8 | 27000 | 25,8 | 6 | 1,5 | 0,262 | 0,144 | 416,34 |
| 25 | 112 (280) | 50 | 41 | 4,5 /92,2 | 30000 | 9,5 | 18,5 | 1,76 | - | - | 417,57 |

Таблица 2.3 – Матрица планирования и результаты компьютерных экспериментов для бетона В40

| № | -t ($\sigma_{sp}$) | h,см | b,см | $\mu/A_s$,см$^2$ | E,МПа | X,см | $\sigma_b$,МПа | $\sigma_t$,МПа | $10^3\varepsilon_c$ | $10^3\varepsilon_p$ | $N_a$, кн |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 32 (80) | 20 | 23 | 3,5 /16,1 | 36500 | 13,8 | 3,8 | 1,2 | 0,112 | 0,051 | 50,9 |
| 2 | 52 (130) | 30 | 32 | 4,5 /43,2 | 20500 | 20,1 | 5,4 | 1,6 | 0,281 | 0,138 | 147,6 |
| 3 | 72 (180) | 40 | 41 | 0,5 /8,2 | 24500 | 27,4 | 2,5 | 0,9 | 0,106 | 0,049 | 115,5 |
| 4 | 92 (230) | 50 | 5 | 1,5 /3,75 | 28500 | 32,7 | 6,6 | 1,8 | 0,255 | 0,135 | 44,88 |
| 5 | 112 (280) | 10 | 14 | 2,5 /3,5 | 32500 | 6,9 | 10,4 | 2 | 0,388 | 0,174 | 47,14 |
| 6 | 32 (80) | 30 | 41 | 1,5/18,5 | 32500 | 20,7 | 2,5 | 0,9 | 0,08 | 0,036 | 88,31 |
| 7 | 52 (130) | 40 | 5 | 2,5 /5,0 | 36500 | 26,7 | 5,1 | 1,6 | 0,154 | 0,077 | 28,4 |
| 8 | 72 (180) | 50 | 14 | 3,5/24,5 | 20500 | 5,8 | 29 | 2,3 | - | - | 131,76 |
| 9 | 92 (230) | 10 | 23 | 4,5/10,4 | 24500 | 5,6 | 10,9 | 1,9 | 0,546 | 0,426 | 77,97 |
| 10 | 112 (280) | 20 | 32 | 0,5 /3,2 | 28500 | 13,7 | 3,9 | 1,3 | 0,143 | 0,065 | 71,23 |
| 11 | 32 (80) | 40 | 14 | 4,5/25,2 | 28500 | 27,1 | 3,7 | 1,3 | 0,138 | 0,066 | 58,55 |
| 12 | 52 (130) | 50 | 23 | 0,5/5,75 | 32500 | 34,3 | 1,9 | 0,7 | 0,060 | 0,027 | 61,76 |
| 13 | 72 (180) | 10 | 32 | 1,5 /4,8 | 36500 | 7,2 | 5,4 | 1,4 | 0,163 | 0,064 | 55,59 |
| 14 | 92 (230) | 20 | 41 | 2,5/20,5 | 20500 | 6,9 | 12,1 | 1,9 | 0,725 | 1,387 | 172,15 |
| 15 | 112 (280) | 30 | 5 | 3,5 /5,25 | 24500 | 3,9 | 29 | 2,3 | - | - | 33,26 |
| 16 | 32 (80) | 50 | 32 | 2,5 /40 | 24500 | 34 | 3 | 1,1 | 0,125 | 0,059 | 131,38 |
| 17 | 52 (130) | 10 | 41 | 3,5/14,4 | 28500 | 7,2 | 5,8 | 1,5 | 0,221 | 0,085 | 77,34 |
| 18 | 72 (180) | 20 | 5 | 4,5 /4,5 | 32500 | 13,1 | 8,1 | 1,9 | 0,29 | 0,151 | 23,55 |
| 19 | 92 (230) | 30 | 14 | 0,5 /2,1 | 36500 | 20,5 | 3,3 | 1,1 | 0,096 | 0,044 | 39,28 |
| 20 | 112 (280) | 40 | 23 | 1,5/13,8 | 20500 | 3,8 | 29 | 2,3 | - | - | 173,61 |
| 21 | 32 (80) | 10 | 5 | 0,5/0,25 | 20500 | 7,3 | 1,1 | 0,4 | 0,051 | 0,018 | 1,69 |
| 22 | 52 (130) | 20 | 14 | 1,5 /4,2 | 24500 | 13,8 | 3,7 | 1,2 | 0,16 | 0,072 | 30,1 |
| 23 | 72 (180) | 30 | 23 | 2,5/17,3 | 28500 | 19,8 | 6,5 | 1,8 | 0,254 | 0,131 | 126,5 |
| 24 | 92 (230) | 40 | 32 | 3,5 /44,8 | 32500 | 5,5 | 29 | 2,3 | - | - | 301,12 |
| 25 | 112 (280) | 50 | 41 | 4,5 /92,2 | 36500 | 8 | 29 | 2,3 | - | - | 1065,4 |

Применим ранее изложенную методику нетрадиционного регрессионного анализа (§1.5) и программу ANETR для получения зависимости параметров напряженного состояния от параметров железобетонных элементов и величины предварительного напряжения в арматуре. Для этого используются результаты многофакторных экспериментов (таблицы 2.2 и 2.3).

Используя программу ANETR, подбираем вид частного уравнения, определяющего влияние отдельного фактора на величину выходного параметра. Сначала факторы располагаются в последовательности уменьшения влияния на величину выходного параметра, затем для каждого фактора подбирается соответствующее уравнение из 15 типов уравнений, заложенных в программе. Программа заканчивается подбором определенного сочетания частных уравнений для получения зависимостей выходных величин от варьируемых параметров.

При проведении экспериментов предварительное натяжение в арматуре принято так, чтобы в сечении элемента не образовалась трещина. Тогда напряженное состояние в сечении характеризуется растягивающим и снижающим максимальным напряжением в бетоне, высотой сжатой зоны и напряжением в арматуре. Максимальные (краевые) деформации в бетоне при необходимости можно найти из закона деформирования (2.14). Поэтому будем определять регрессионные зависимости для вышеперечисленных четырех выходных параметров напряженного состояния.

Для бетона В25 при получении регрессионных зависимостей для максимального растягивающего напряжения $\sigma_t$ получены следующие частные зависимости:

$$f_1(\sigma_p) = -1,935 + 1,438 \lg \sigma_p,\ f_2(h) = 1,325 - 1,578/h,\ f_3(b) = 1,226 - 5,77 \cdot 10^{-4} b,$$
$$f_4(\mu) = 1,519 - 0,372/\mu,\ f_5(E) = 3,957 \cdot 10^{-9} E^2 - 1,921 \cdot 10^{-4} E + 3,514.$$

Общая многомерная модель сформирована в следующем виде:

$$\sigma_t = f_1(\sigma_p) + f_2(h) + f_3(b) + f_4(\mu) + f_5(E) - 5,01.$$

После подстановки частных зависимостей и проведения свободных членов получим окончательно

$$\sigma_t = 1,438 \lg \sigma_p - 1,578/h - 5,778 \cdot 10^{-4} b - 0,372/\mu + 3,957 \cdot 10^{-9} E^2 - 1,921 \cdot 10^{-4} E + 0,68. \quad (2.30)$$

В это выражение переменные нужно подставлять в тех единицах, в которых они указаны в таблице 2.2. Результаты также будут в тех единицах, в которых приведены выходные величины в таблице 2.2.

Среднеквадратическое отклонение модели составляет 18,3%, а коэффициент множественной корреляций $R = 0,979$, что говорит о достаточно высокой корректности эксперимента и полноте охвата моделью всех факторов, участвующих в эксперименте.Отметим, что разработчики программы оценивают полученную регрессионную модель, на “отлично”, если СКО меньше 25 %.

Полученные регрессионные зависимости справедливы в пределах принятого изменения параметров модели. Они позволяют определить параметры напряженного состояния без проведения численных расчетов и управлять ими соответствующим подборам варьируемых параметров.

Регрессионная зависимость для максимального сжимающего напряжения в этом же бетоне имеет следующий окончательный вид:

$$\begin{aligned}\sigma_b = {} & 1,3\exp\left(0,0081\sigma_p\right) + 3,515\cdot 10^{-3}h^2 - 0,129h - 1,142\lg b - \\ & -0,477\mu^2 + 3,94\mu + 9,8\cdot 10^{-8}E^2 - 5,02\cdot 10^{-3}\cdot E + 57,84.\end{aligned} \tag{2.31}$$

Среднеквадратическое отклонение модели $CKO = 29,9\%$, коэффициент множественной корреляции $R = 0,885$.

Регрессионная зависимость для высоты сжатой зоны имеет вид

$$\begin{aligned}x = {} & 0,0665\sigma_p - 3,312\cdot 10^{-4}\sigma_p^2 + h/\left(1,25 + 0,0165h\right) - 4,713\cdot 10^{-3}b^2 + \\ & +0,21b - 6,48\lg\mu - 2,156\cdot 10^{-7}E^2 + 1,086\cdot 10^{-2}E - 131,7,\end{aligned} \tag{2.32}$$

$CKO = 31,6\%$, $R = 0,865$.

Регрессионная зависимость для напряжения в арматуре

$$\begin{aligned}\sigma_s = {} & \sigma_p/\left(2,076 + 1,792\cdot 10^{-3}\sigma_p\right) - 0,283h - 4,35\cdot 10^{-2}b^2 + \\ & +2,259b + 10^3\left(5,1 + 4,45\mu\right)^{-1} - 2,3\cdot 10^{-7}E^2 + 1,27\cdot 10^{-2\cdot}E - 255,4,\end{aligned} \tag{2.33}$$

$CKO = 24,1\%$, $R = 0,949$.

Обработка результатов аналогичных компьютерных экспериментов для бетона класса В40 (таблица 2.3) с помощью программы ANETR дала следующие регрессионные зависимости

$$\begin{aligned}\sigma_t = {} & \sigma_p/\left(60,993 + 0,27\sigma_p\right) + 0,3\lg h + 3,967\cdot 10^{-5}b^2 - \\ & -2,748\cdot 10^{-3}b - 0,109\mu^2 + 0,772\mu + 9,554\cdot 10^3/E - 1,77;\end{aligned} \tag{2.30'}$$

$$\begin{aligned}\sigma_b = {} & \sigma_p/\left(36,06 - 0,08\sigma_p\right) + 0,219h + 1,333\cdot 10^{-3}b - 0,94\mu^2 + \\ & +7,626\mu + 8,522\cdot 10^{-8}E^2 - 5,107\cdot 10^{-3}E + 55,685;\end{aligned} \tag{2.31'}$$

$$x = 0,0567\sigma_p - 3,484\cdot 10^{-4}\sigma_p^2 + h/(1,246 + 0,02h) + 9,763/b + \\ +0,7\mu^2 - 5,39\mu - 1,11\cdot 10^{-7}E^2 + 6,48\cdot 10^{-3}E - 81,12; \qquad (2.32')$$

$$\sigma_s = 0,451\sigma_p + 0,01h^2 - 0,79h - 102,25/b + 8,086\mu^2 + 60,69\mu + \lg E - 331,26. \qquad (2.33')$$

Среднеквадратические отклонения моделей, коэффициенты множественной корреляции примерно также же, что для бетона В25.

## 2.2 Определение предельных нагрузок для изгибаемых железобетонных элементов

### 2.2.1 Определение предельного момента по образованию трещины

Через этот предельный момент записывается первая категория требований второй группы предельного состояния. Поэтому такие расчеты являются нормативными. В них принимается, что в растянутой зоне бетона напряжение постоянно и равно пределу прочности бетона на растяжение–$R_{bt}$. В данной работе в расчеты заложена реальная эпюра напряжений в этой зоне – краевое напряжение равно $R_{bt}$, а в остальных волокнах определяются по диаграмме деформирования в соответствии с эпюрой деформаций.

Рассмотрим сечение общего вида, показанное на рисунке 2.2,в которым краевое напряжение $\sigma_m = R_{bt}$. Считаем справедливыми допущения, принятые при определения напряжений обжатия (§2.1.3). Тогда все рассуждения и выкладки, приведенные при определении предельного предварительного напряжения в арматуре, остается справедливыми.

В отличие от рассмотренного случая здесь добавляется внешняя нагрузка: изгибающий момент или внецентренно приложенная сила. Если раньше внутренние силы были самоуравновешенными, то здесь они уравновешиваются внешней нагрузкой.

Поэтому в уравнение равновесия (2.27) добавляется внешняя сила *P*:

$$R_{bt}\left\{\begin{array}{l} 0,683b(h-x)+A_{ct}+2,667\alpha A_s- \\ \left.-\dfrac{1,333bx^2+2,667A_c(x-h_c/2)+2,667\alpha A_s'(x-a')}{h-x}\right\}+\sigma_{sp}A_s+\sigma_{sp}'A_s'\pm P=0. \end{array}\right. \quad (2.34)$$

Здесь сила *P* берется со знаком "плюс" при внецентренном сжатиии "минус" – при внецентренном растяжении, а при изгиба она равна нулю.

Сумма моментов внутренних сил (2.28) теперь равна внешнему моменту и определяет предельный момент по образованию трещины. Внешний момент удобно определять относительно центра тяжести сечения. Относительно этой оси момент внешних сил будет равен

$$M_m = R_{bt}\left\{\begin{array}{l} b(h-x)(0,076h+0,265x)+A_{ct}(h-h_{ct}/2)+2,667\alpha A_s(h/2-a)+ \\ +\dfrac{0,222bx^2(3h-2x)+1,333A_c(x-h_c)(x-h_c/2)+2,667\alpha A_s'(x-a')(h/2-a')}{h-x}+ \\ +\left[\sigma_{sp}A_s(h/2-a)-\sigma_{sp}'A_s'(h/2-a')\right]/R_{bt} \end{array}\right\}=W_{pe}R_{bt}, \quad (2.35)$$

где $W_{pe}$ – упругопластический момент сопротивления предварительно напряженного сечения.

Трещина не образуется, если момент внешних сил $M$ в рассматриваемом, обычно опасном, сечении не превысит предельный момент, т.е.

$$M \le M_m \tag{2.36}$$

При внецентренном воздействии момент продольной силы берется относительно той же оси, что момент внутренних сил.

Для определения предельного момента из (2.34) путем решения квадратного уравнения определяют высоту сжатой зоны $x$. Подставляя ее в выражения (2.35) находят предельный момент трещинообразования.

Уравнения (2.34) и (2.35) является универсальными: применимы для различных форм сечений при различных видах армирования. Для частных случаев они упрощаются. Так, для изгибаемого прямоугольного сечения с напрягаемой арматурой в растянутой зоне получаем

$$0,683b(h-x)^2 + 2,667\alpha A_s(h-x) - 1,333bx^2 + (h-x)\sigma_{sp}A_s/R_{bt} = 0,$$

$$M_m = R_{bt}\left\{b(h-x)(0,076h+0,265x) + 2,667\alpha A_s\left(\frac{h}{2}-a\right) + \frac{0,222bx^2(3h-2x)}{h-x} + \sigma_{sp}A_s\left(\frac{h}{2}-a\right)\right\}.$$

Вводя безразмерные параметры:

$$\xi = x/h,\ \mu = A_s/bh,\ a_0 = a/h,\ S = \mu\sigma_{sp}/R_{bt}, \tag{2.37}$$

перепишем эти уравнения в следующем виде:

$$\xi^2 + 2(1,05 + 2,05\alpha\mu + S/1,3)\xi - 1,05 - 2,05\alpha\mu - 1,54S = 0, \tag{2.34'}$$

$$\frac{M_m}{bh^2R_{bt}} = (1-\xi)(0,076+0,265\xi) + 2,667\alpha\mu(0,5-a_0) + \frac{0,222S^2(3-2\xi)}{1-\xi} + S(0,5-a_0). \tag{2.35'}$$

Ранее при определении предельного предварительного напряжения для рассматриваемого сечения было найдено:

$$\alpha\mu = 0,056,\ S = 8,75\cdot10^{-3}\cdot112,5/2,1 = 0,47.$$

Расчет при этих данных дает

$$\xi = 0,53,\ M_m = 0,42R_{bt}bh^2 = 0,42\cdot2100\cdot0,153\cdot0,301^2 = 12,2\ кНм.$$

Если нет предварительного напряжения ($S=0$), то

$$\xi = 0,423,\ M_m = 0,317 R_{bt} bh^2 = 9,24\ кНм.$$

Для неармированного прямоугольного сечения по $(2.34^{'})$ $\xi = 0,417$. Тогда пластический момент сопротивления по $(2.35^{'})$ равен $W_{pe} = 0,252bh^2$, что совпадает с известной формулой сопротивления материалов $W_{pe} = bh^2/4$.

Если считать момент трещинообразования по существующей методике, то для рассматриваемого сечения разрешающие уравнения примут вид:

$$\xi = \frac{1+2\alpha\mu+S}{2+2\alpha\mu+S},\ \frac{M_m}{bh^2R_{bt}} = 0,5(1-\xi)\xi + \frac{0,5-\xi/3}{1-\xi} + (2\alpha\mu+S)(0,5-a_0).$$

При выше принятых размерах сечения:

$$S=0,\ \xi = 0,526,\ M_m = 0,668 R_{bt} bh^2 = 19,4\ кНм.$$

По предлагаемой методике момент по образованию трещины намного меньше, чем по существующей методике. Это не противоречит логике и здравому смыслу. По существующей модели в момент образования трещины напряжение в растянутой зоне считается постоянной и равной пределу прочности бетона на растяжение–$R_{bt}$. По нашей модели трещина образуется тогда, когда краевые напряжения в растянутой зоне достигло предельного значения, а в других волокнах этой зоны напряжения определяется по диаграмме деформирования бетона. Разумеется для реализации первой модели нужна более высокая нагрузка, чем во втором случае. Разные модели, разные результаты. Наш подход логически обоснован всесторонне.

Для проверки предлагаемой модели был проведен нелинейный расчет напряженного состояния рассмотренного выше железобетонного элемента на чистый изгиб с помощью программы ЛИРА. Изгибающий момент повышали с определенным шагом и контролировали появление трещины. Она появилась при $M=10,8кНм$, что превышает рассчитанный нами момент на 17%, а положение нулевой линии практически совпадает.

Погрешность результатов объясняется тем, что программа ЛИРА предназначена для проведения нормативных расчетов, и в ней по умолчанию заложены коэффициенты условия работы, характера нагрузки, свойств материала и надежности. Кроме того небольшую погрешность может внести линейная аппроксимация диаграммы деформации в сжатой зоне. Указанная погрешность идет в запас трещиностойкости. С учетом этого предлагаемую

модель следует признать адекватной и пригодной для проведения инженерных расчетов.

Результаты компьютерного эксперимента отличаются от результатов по существующей методике в 1,8 раза, причем погрешность идет в ущерб трещиностойкости.

### 2.2.2 Определение предельного момента по несущей способности

Эти расчеты проводятся по утвержденным нормам в строительстве (СНиПы, евронормы). Они здесь излагаются кратко с целью определения верхнего предела изменения эксплуатационных нагрузок при анализе реального состояния конструкций.

При этих расчетах принимают следующие исходные положения:

– бетон растянутой зоны не работает (разрушен);

– напряжения в сжатой зоне распределено равномерно и равно расчетному сопротивлению;

– напряжение в растянутой арматуре не превышает расчетное сопротивление $\sigma_s = R_s$.

В общем случае условие прочности для изгибаемых, внецентренно сжатых и растянутых элементов сводится к тому, чтобы момент внешних сил $M$ не превосходил момента внутренних сил в сечении $M_p$. Момент внешних сил при изгибе берется из эпюры изгибающих моментов, а при внецентренном растяжениисжатии момент продольной силы берется относительно той же оси, что момент внутренних сил: $M = Pe$, $e$ – эксцентриситет приложения силы.

Одним из критериев предельного состояния является достижение напряжением в растянутой арматуре предельного значения. Это напряжение сильно зависит от относительной высоты сжатой зоны. Значение этого параметра, при который $\sigma_s = R_s$, определяется по формуле

$$\xi_R = \frac{x_R}{h_0} = \frac{\omega}{1+\sigma_{sr}\left(1-\omega/1{,}1\right)/\sigma_{scu}}, \qquad (2.38)$$

Здесь $\sigma_{scu} = 400\ МПа$ – напряжение, соответствующее предельной деформации 0,2%; $\sigma_{SR} = R_S - \sigma_{SP}$ – напряжение в арматуре с физическим пределом текучести. Для арматуры с условным пределом текучести

$$\sigma_{SR} = R_s + \sigma_{scu} - \sigma_{sp} - \Delta\sigma_{sp}, \qquad (2.39)$$

где $\Delta\sigma_{sp} = 1500\sigma_{sp}/R_s - 1200 \geq 0.$

Параметр $\omega$ называется характеристикой деформативных свойств бетона сжатой зоны и вычисляется по формуле:

$$\omega = a - 0,008R_b,$$

где $a = 0,85$ для тяжелых бетонов и $a = 0,8$ для бетонов на легких заполнителях.

Рассмотрим вновь сечение общего вида, показанное на рисунке 2.3. Рекомендуется применять изгибаемые элементы при сечениях, удовлетворяющих условию случая 1:

$$x \le \xi_R h_0, h_0 = h - a.$$

Предполагается, что в растянутой и сжатой зоне могут находиться как напрягаемая так и ненапрягаемая арматура. Усилия в них вычисляются по разному:

$$N_s = R_s A_s;\ N_{sp} = \gamma_{s6} R_s A_{sp};\ N'_{sp} = \sigma_{sc} A'_{sp};\ N_a = N_{sp} + N_s;\ N'_a = N'_{sp} + N'_s \quad (2.40)$$

Здесь $\gamma_{s6}$ – дополнительный коэффициент условий работы, вычисляемый по формуле

$$\gamma_{s6} = \eta - (\eta - 1)/(2\xi_0/\xi_R - 1) \le \eta,\ \xi_0 \le \xi_R,$$

где коэффициент $\eta$ принимают в зависимости от класса арматуры.

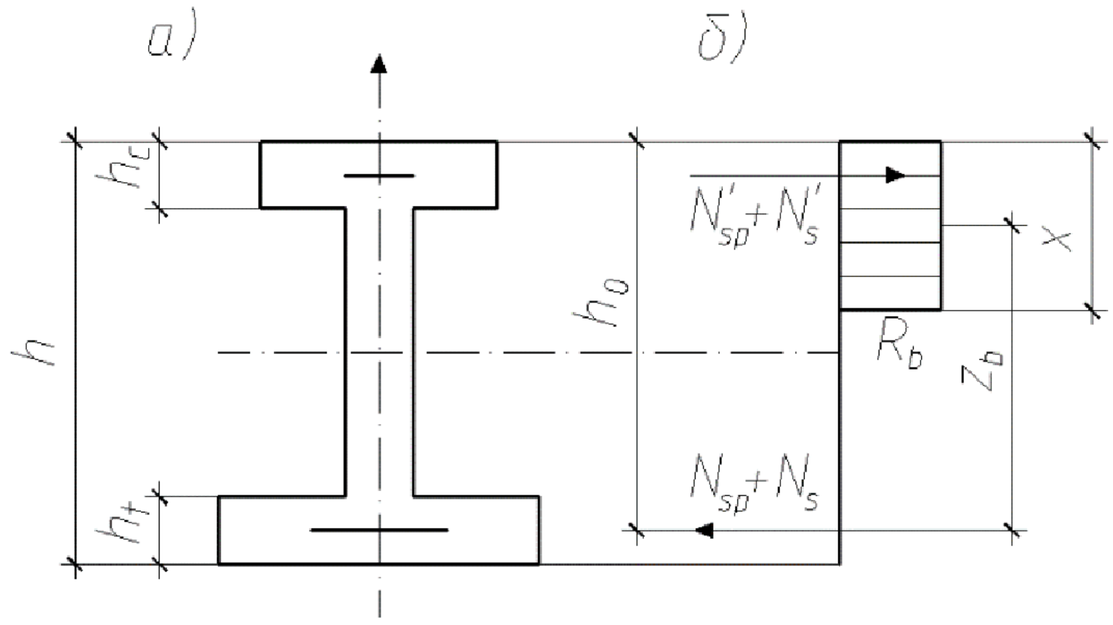



Рисунок 2.3 – К определению несущей способности балки

Из условия равенства нулю суммы проекций всех сил на ось элемента

$$R_s A_s + \gamma_{s6} R_s A_{sp} - R_b A_{bc} - R_{sc} A'_s - \sigma_{sc} A'_{sp} \pm P = 0 \quad (2.41)$$

можно определить площадь бетона сжатой зоны $A_{bc}$, а по ней и высоту сжатой зоны $x$. Здесь напряжение $\sigma_{sp}$ в арматуре $A'_{sp}$ определяется по формуле:

$$\sigma_{sc} = \sigma_{scu} - \sigma'_{sp}. \quad (2.42)$$

Сумма моментов внутренних сил берется относительно оси, проходящей через центры тяжести растянутых арматур и определяет предельный момент по несущей способности:

$$M_p = R_b A_{bc} z_b + N'_a (h_0 - a'). \qquad (2.43)$$

Если в сечении отсутствуют отдельные виды арматуры, то выпадают и соответствующие члены в уравнениях (2.41) и (2.43).

Для переармированных изгибаемых элементов и внецентренно сжатых при малых эксцентриситетах $\xi_0 = x/h_0 > \xi_R$ (2 случай). При этом напряжение в растянутой арматуре будет меньше расчетного сопротивления $R_s$, предельное состояние наступает из-за разрушения бетона сжатой зоны. Поэтому в уравнениях (2.41) и (2.43) напряжение $R_s$ заменяют на $\sigma_s$.Это напряжение определяют по формуле

$$\sigma_s = \frac{R_s\left(0,2+\xi_R\right)}{0,2+\xi_0+0,35\left(1-\xi_0/\xi_R\right)\sigma_{sp}/R_s}. \qquad (2.44)$$

В этом случае для определения высоты сжатой зоны нужно уравнения (2.41) и (2.44) решать совместно.

Рассмотрим особенности расчета внецентренно сжатых элементов. Здесь различают элементы с относительно большими эксцентриситетами продольной силы (случай 1, $\xi_0 \le \xi_R$) и малыми эксцентриситетами силы (случай 2, $\xi_0 > \xi_R$). В обоих случаях расчет полностью совпадает с изложеннымвыше. Но во втором случае ($\xi_0 > \xi_R$) различается определение напряжения в растянутой арматуре. Для бетона классов В30 и ниже с ненапрягаемой арматурой классов А-IIIи ниже это напряжение определяется по формуле

$$\sigma_s = \left(2\frac{1-\xi_0}{1-\xi_R}-1\right)R_s. \qquad (2.45)$$

Для элементов из бетона классов выше В30 с арматурой классов выше А-III это напряжение следует определять по формуле

$$\sigma_s = \sigma_{sp} + \sigma_{scu}\frac{\omega/\xi_0 - 1}{1-\omega/1,1} \le 0,8R_s. \qquad (2.45')$$

Если $\sigma_s > 0,8R_s$ (для арматуры классов А-III и выше), то напряжение следует определять по формуле

$$\sigma_s = [0,8 + 0,2(\xi_{el} - \xi_0)/(\xi_{el} - \xi_R)]R_s, \qquad (2.46)$$

где $\xi_{el}$ определятся по формуле (2.38) с заменой $\sigma_{SR}$ на

$$\sigma_{el} = 0,8R_s - \sigma_{sp}.$$

Если напряжение, вычисленное по (2.46), превышает $R_s$, то принимают $\sigma_s = R_s$.

Для рассмотренного выше прямоугольного сечения с одиночной арматурой при изгибе получаем

$$x = \frac{R_s A_s}{bR_b}, \; M_p = R_s A_s\left(h_0 - \frac{x}{2}\right). \qquad (2.47)$$

При принятых числовых данных, марке бетона и арматуры имеем:

$$\omega = 0,85 - 0,008 \cdot 22 = 0,674, \varepsilon_R = 0,674\Big/\left[1 + (1 - 0,674)/1,1 \cdot (370 - 112)/400\right] = 0,54,$$

$$x = 370 \cdot 4,03 \cdot 10^{-4}/0,153 \cdot 22 = 0,044 \; м, \; z_b = 30,1 - 2,8 - 2,2 = 25,1 см,$$

$$M_p = 370 \cdot 10^3 \cdot 4,03 \cdot 10^{-4} \cdot 0,251 = 37,4 \; кНм.$$

Экспериментально получено [4] $M_p = 41.5 кНм$. С учетом существенной неоднородности материала и большого разброса характеристик бетона, соответствие экспериментального и расчетного значения разрушающего момента можно считать хорошим.

Для рассматриваемого примера отношение момента по образованию трещины к разрушающему моменту составляет:

$$m_p = M_m / M_p = 9,24 / 37,4 = 0,247.$$

Для напрягаемой арматуры это отношение будет выше, т.к. выше их трещиностойкость. Например, для рассматриваемого примера с предварительным напряжением $\sigma_{sp} = 112.5 \; МПа$

$$m_p = 12,2 / 37,4 = 0,32.$$

Для определения в дальнейшем регрессионных зависимостей параметров напряженного состояния нам нужно провести компьютерные эксперименты. Они будут проводиться как при исследований предварительных напряжений с

пятью переменными. При этом основные переменные остаются прежними за исключением того, что предварительное напряжение заменяется внешним моментом $M$, который будет меняться от $M_m$до$M_p$. Эти моменты кроме характеристик бетона и арматуры, которые остаются прежними, зависят от размеров сечения. Их для каждого эксперимента возьмем из матрицы планирования (таблица 2.2).

Для каждого опыта посчитаем разрушающие моменты и составим таблицу их значений (таблица 2.4).

Таблица 2.4 – Значения разрушающего момента в кНм

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B40 | 72,2 | 255 | 106,3 | 55,1 | 8,29 | 160 | 52,3 | 283,7 | 18,1 | 20,3 | 201,9 | 93,4 | 12,9 |
| B25 | 54 | 161 | 103,6 | 50,5 | 6,9 | 147,2 | 44,3 | 216,7 | 10,6 | 19,8 | 128 | 91,1 | 11,7 |
| № | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | |
| B40 | 104,7 | 25,9 | 525,4 | 29,3 | 17,4 | 20,2 | 161,6 | 0,75 | 22,9 | 13,4 | 413,2 | 924 | |
| B25 | 88,1 | 27 | 444,7 | 21,6 | 10,8 | 19,7 | 150,6 | 0,73 | 22 | 113,2 | 31,2 | 590,4 | |

Определим пределы изменения параметра $m$ в планируемых экспериментах. Мы, видим что экстремальные значения разрушающего момента будут в 21-оми 25-ом опытах. Найдем для них момент трещинообразования из выражений (2.34’) и (2.35’). В результате расчетов для бетона B40 получим $M_{m,25} = 139,7\ кНм$; $m_{p,25} = 0{,}15$; $M_{m,21} = 0,257\ кНм$; $m_{p,21} = 0{,}34$. Точно такой же результат получаем и для бетона B25.

Таким образом, при исследовании напряженного состояния изгибаемых железобетонных элементов параметр внешней нагрузки $m_p = M/M_p$ можно менять от 0,15 до 1.

## 2.3 Определение напряженно-деформированного состояния железобетонных элементов с трещинами

Расчет железобетонных конструкции с трещинами представляет сложную научную проблему. Первые трещины по длине элемента появляются вследствие неоднородной прочности бетона в наиболее слабом месте. По мере удаления от краев трещины благодаря сцеплению с бетоном напряжение в арматуре уменьшается, а растягивающие напряжения в бетоне увеличиваются и там, где оно достигает предельного значения, появляется смежная трещина, расположенная на расстоянии $h_m$ от первой. В сечении с трещиной нарушается сцепление арматуры с бетоном, растягивающие усилия в основном воспринимаются арматурой. В сечениях же между трещинами растягивающие

усилия воспринимают и арматура и бетон. Деформации и напряжения в арматуре и бетоне, а также высота сжатой зоны между трещинами меняются. Эту неравномерность в расчетах учитывают введением специальных коэффициентов, которые равны отношениям средних значений на участке между трещинами к значениям в сечении с трещиной

$$\psi_s = \frac{\varepsilon_{sm}}{\varepsilon_s}, \quad \psi_b = \frac{\varepsilon_{bm}}{\varepsilon_b}. \tag{2.48}$$

Само появление трещин визгибаемых элементах не означает исчерпания его несущей способности. Оно приводит к возрастанию усилии в сечениях с трещиной, что снижает прочность элемента. Кроме этого за счет раскрытия трещины возрастает коррозия арматуры, что снижает долговечность конструкции. Нормами регламентируется именно величина раскрытия трещины, которая зависит от напряженного состояния в сечении с трещиной. Так как трещины существуют в любых железобетонных конструкциях, то определение напряженногосостояния в сечении с трещиной очень важно для оценки реального состояния эксплуатируемой конструкции.

Расчету железобетонных конструкции с трещинами посвящено много монографии [3, 4, 8, 9, 10, 11, 13] и статей [20-25]. В них создавались и развивались аналитические и численные методы расчета. Ниже дается критический обзор современных методов расчета железобетонных конструкции с трещинами и предлагается новый метод расчета.

### 2.3.1 Современные аналитические методы расчета

Для аналитического расчета напряженного состояния в сечении с трещиной наиболее часто применяется методика, изложенная в работе [6]. Она основана на следующих положениях:

1) средние сечения между трещинами после изгиба остаются плоскими;
2) связь между высотой сжатой зоны в сечении с трещиной $x$ и средней высотой сжатой зоны выражается эмпирической формулой

$$\varphi = x/x_m = 1 - 0,7/(1 + 100\mu). \tag{2.49}$$

3) участок бетона растянутой зоны над трещиной в расчете не учитывается.

В сечении с трещиной используется трансформированная диаграмма деформации, то есть деформации определяются в среднем сечении, где справедлива гипотеза плоских сечений, а затем пересчитываются на сечение с трещиной с помощью коэффициентов (2.48) и (2.49).

Исходя из этих положений напряжения в бетоне $\sigma_b$ и арматуре сжатой зоны $\sigma_s'$ сечения с трещиной выражают через напряжение в арматуре

растянутой зоны $\sigma_s$ и высоту сжатой зоны $x$. Криволинейную эпюру напряжений в бетоне сжатой зоны заменяют эквивалентной прямоугольной эпюрой и составляют уравнение равновесия внутренних сил в сечений с трещиной. После преобразований это уравнение проводится к квадратному уравнению относительно $x$. Отсюда определяется высота сжатой зоны.

Напряжение в бетоне сжатой зоны $\sigma_b$ находят из условия равенства моментов внешних сил и усилия предварительного обжатия моменту внутренних усилий относительно оси, проходящей через центр тяжести растянутой арматуры. После этого через $\sigma_b$ и $x$ определяется напряжение в растянутой арматуре $\sigma_s$.

Эта методика имеет существенный недостаток: она не учитывает работу растянутого бетона над трещиной, то есть считается, что трещина охватывает всю растянутую зону. Реально это не так.

Глубокий анализ современных методов аналитического расчета выполнил профессор Нугужинов Ж.С. На основе этого им предложены несколько методов аналитического расчета железобетонных конструкций с трещинами [4], отличающихся исходными положениями и целью расчетов: определение напряжений, определение сцепления с арматурой, определение шага трещин, определение приведенной жесткости участка с трещиной. Изложим основы тех методов, которые близки по постановке задачи нашему исследованию.

Все излагаемые далее методы расчета базируются на блочной модели А.А Гвоздева. В совершенствование этой модели внесли существенный вклад Васильев В.В., Мулин И.М., Белов В.И., Пересыпкин Е.М., Байков В.Н., Нугужинов Ж.С. и другие.

Двумя сечениями из изгибаемой балки выделяется блок: одно сечение проводится по нормальной к оси балки трещине, второе на расстоянии l по длине. Принимается закон плоских сечений, длина трещины считается известной.

Изгибающие моменты и поперечные силы в сечениях заменяются соответственно нормальными и касательными напряжениями. Закон изменения нормальных напряжений по высоте сечения принимаются линейным (закон Гука), а касательных напряжений – параболическим. Тогда по формуле сопротивления материалов можно найти нормальные напряжения в сечениях в зависимости от изгибающего момента с учетом смещения положения нейтральной оси. Выражение для касательного напряжения определяется из граничных условий в сечений.

Высота сжатой зоны определяется из условия равновесия блока в виде суммы проекции сил на ось балки. Для прямоугольного сечения это условие сводится к квадратному уравнению. После этого легко вычисляются нормальные напряжения в сечениях и усилие в арматуре. Далее из условия равновесия блока в виде суммы моментов внутренних сил относительно

нейтральной оси сечения определяется поперечная сила в сечении. Зная закон распределения касательных напряжений и поперечную силу, можно определить силы сцепления арматуры с бетоном $\tau_c$.

С другой стороны силы сцепления можно найти из условия равновесия одиночной арматуры в блоке $\tau_c^*$. Если окажется, что

$$\tau_c \geq \tau_c^*, \tag{2.50}$$

то сцепление арматуры и бетона нарушится, т.е. на другом конце выделенного блока появится трещина.

Если нужно определить шаг трещины, то расчеты по определению сил сцепления можно повторить, меняя длину блока. Длина блока, при котором (2.50) превратится в равенство, будет равна шагу трещин.

Слабым местом этого метода является использование закона Гука для нормальных напряжений в сечений, что справедливо только при низких уровнях напряжений.

Этот недостаток устранен в предложенной модифицированной блочной модели. Здесь нормальные напряжения в сечении представлены в виде кубического полинома, коэффициенты которого определяются из граничных условий в сечений.

После процедур и преобразований аналогичных предыдущим, для прямоугольного сечения получены выражения для определения нормальных и касательных напряжений в сечении с трещиной, для определения напряжения в арматуре, сил сцепления бетона с арматурой и оценки возможности образования новой трещины на втором торце выделенного блока.

В отличие от предыдущей модели здесь заложена возможность учета релаксации напряжений в бетоне и арматуре. Для этого задаются экспоненциальные законы изменения модулей упругости материалов во времени.

Для чистого изгиба предлагается несколько измененный вариант модифицированной блочной модели, позволяющий определить дополнительно осевой момент инерции сечения с трещиной и ее кривизну.

Рассмотренные модификации блочной модели позволяют определить полностью напряженное состояние в сечении с трещиной. Вместе с этим следует отметить их общие недостатки:

- не позволяют определить длину трещины (она задается);
- не заложена реальная диаграмма деформирования бетона, вместе этого задается закон распределения напряжений в сечении;
- не учитываются изменения напряжений в арматуре и бетоне, а также положения нейтральной оси по длине блока;
- нет учета предварительного напряжения в арматуре;

- все расчетные формулы получены для прямоугольного сечения с односторонней ненапрягаемой арматурой.

В настоящее время определение напряженного состояния железобетонных конструкции с трещинами осуществляют численными методами. В связи с бурным развитием компьютерной техники, появлением большого количества универсальных стандартных программ такие расчеты стали доступны многим пользователям. Но недостатком численных методов является то, что полученные решения в дальнейшем трудно использовать для других случаев. В этом плане более ценным является аналитическое решение. Отсюда появилась идея сочетания этих методов. На этой базе профессор Нугужинов Ж.С. разработал инженерный метод расчета железобетонных элементов с трещинами.

С использованием экспоненциального закона связи между напряжением и деформацией в бетоне и закона плоских сечений им разработан аналитический расчет, в основе которого лежат аналитические зависимости, полученные путем численных расчетов.

Спланированные численные расчеты с целью получения необходимых в дальнейшем зависимостей проведены по известной методике путем деления сечения на слои малой толщины, в пределах которых напряжения можно считать постоянными. Подробно этот метод расчета будет изложен позже. Результаты таких расчетов обработаны с помощью MatCAD 14 и получены некоторые аналитические зависимости.

Для решения поставленной задачи получены следующие аналитические зависимости для:

- длины трещины $l_m = hf_1(\mu, A)$;
- секущего модуля $E_s = f_2(E_b, M, \mu, A, d)$;
- высоты сжатой зоны $z_0 = hf_3(l_m, M, A, E_b, d)$.

На основе этих зависимостей предложен алгоритм аналитического расчета изгибаемых железобетонных балок с трещинами. Кроме вышеперечисленных параметров определяются:

- напряжения в бетоне и арматуре;
- сила сцепления арматуры с бетоном;
- кривизна балки в сечении с трещиной.

Предложенным методом проведены многочисленые расчеты, которые сравнивались с результатами численных расчетов других авторов [26], и своими экспериментами [27]. Сравнение показало приемлемость метода для решения инженерных задач и надежность получаемых результатов, отраженных в статье [207, 208].

Метод рекомендуется использовать для экспресс-оценки технического состояния изгибаемых железобетонных балок без использования программных комплексов.

Большим преимуществом метода является возможность определения длины трещины. Вместе с этим хочется отметить, что конкретные выражения получены для прямоугольного сечения с односторонней ненапрягаемой арматурой. Более широкое применение метода все равно потребует использования программных средств, ибо реализация численного метода на калькуляторе сопряжено с объемной работой с неизбежными ошибками ввода.

### 2.3.2 Аналитический метод расчета с определением длины трещины

Все существующие аналитические методы расчета напряжений в сечениях с трещиной предполагают длину трещины известной. Считают, что она существует изначально, независимо от действующих нагрузок, и длина ее определена замером. Такое возможно, но действительная длина трещины зависит от приложенной нагрузки. Поэтому надо уметь ее прогнозировать.

В основе предлагаемого метода расчета лежат следующие предположения:

1) средние сечения, расположенные между трещинами после изгиба остаются плоскими;
2) в той части растянутой зоны бетона, где напряжения достигли предела прочности образуется трещина и она не воспринимает нагрузок;
3) в бетоне растянутой зоны над трещиной связь между напряжением и деформацией описывается экспоненциальным законом (2.14);
4) бетон сжатой зоны работает неупруго, эпюру напряжений здесь заменяем прямоугольником с учетом коэффициента полноты эпюры $\omega$.

Последнее предположение будет обосновано позже.

Рассмотрим сечение общего вида показанное на рисунке 2.4,а. Эпюра деформации в среднем сечении и эпюра напряжений в сечении с трещиной показаны на рисунках 2.4,б и 2.4,в.

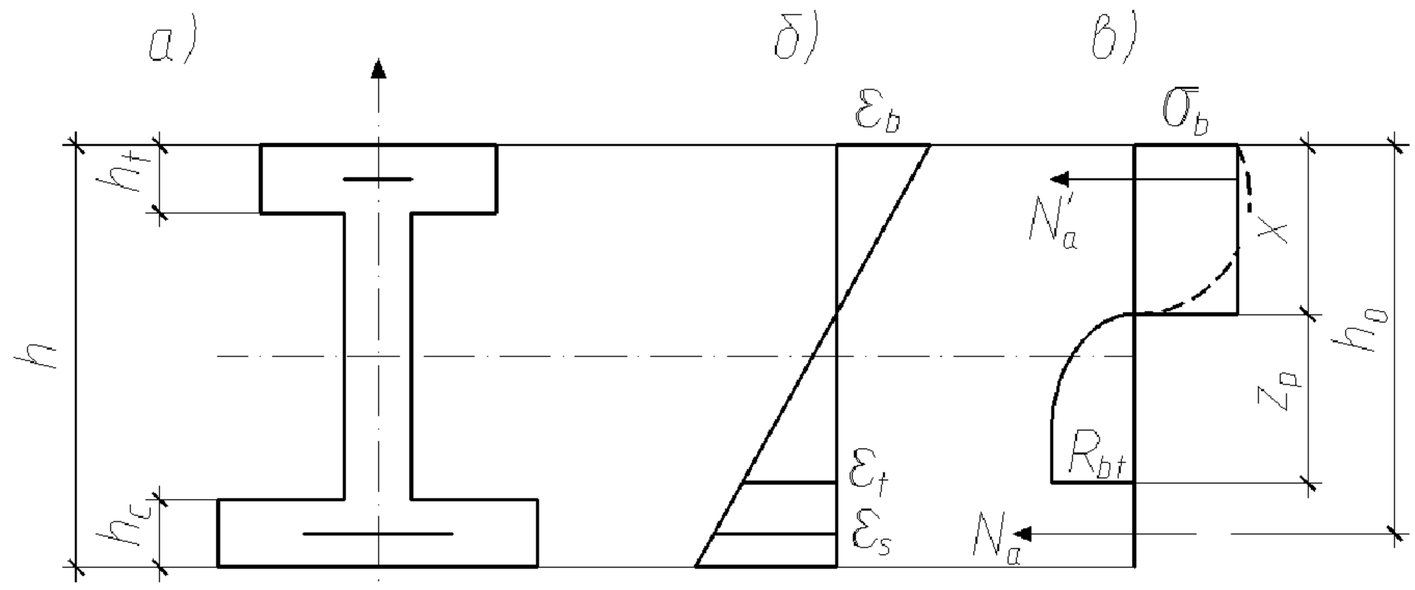



Рисунок 2.4 – К расчету сечения с трещиной

По диаграмме деформирования деформация у вершины трещины будет равна

$$\varepsilon_t = 2,667\, R_{bt} / E_b .$$

Деформация на краю сжатой зоны

$$\varepsilon_b = \varepsilon_t x / z_p = 2,667(R_{bt} / E_b) x / z_p,$$

где $z_p = h - x - l_m$ –высота растянутой зоны бетона над трещиной; $l_m$ – длина трещины.

Напряжения на краю сжатой зоны

$$\sigma_b = E_b' \varepsilon_b = 2,667 R_{bt} \nu x / z_p, \quad \nu = E_b' / E_b.$$

Напряжение в арматуре сжатой зоны

$$\sigma_s' = \sigma_{sp}' - \varepsilon_t E_s (x - a') / z_p = \sigma_{sp}' - 2,667 \alpha R_{bt} (x - a') / z_p.$$

Найдем напряжение в арматуре растянутой зоны. В среднем сечении деформации на уровне трещины и арматуры равны

$$\varepsilon_{tm} = \psi_b \varepsilon_t, \ \varepsilon_{sm} = \varepsilon_{tm} (h_0 - x) / z_p, \ h_0 = h - a.$$

Деформация на уровне арматуры в сечении с трещиной

$$\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_{sm}}{\psi_s} = \varepsilon_t \frac{\psi_b}{\psi_s} \cdot \frac{h_0 - x}{z_p}.$$

Здесь $\psi_b, \psi_s$ –коэффициенты неравномерности ранее введенные формулами (2.48). Тогда напряжение в арматуре будет равно

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s = 2,667 \alpha R_{bt} (\psi_b / \psi_s)(h_0 - x) / z_p. \qquad (2.51)$$

Равнодействующая внутренних сил в растянутой зоне и их момент относительно нулевой линии определяются по формулам (2.26) с заменой $(h-x)$ на $z_p$. Момент этих сил относительно центра тяжести бетона будет равно

$$M_{pc} = M_{po} - N_p (h/2 - x) = R_{bt} b z_p \left[ 0,418 z_p - 0,683 (h/2 - x) \right].$$

Запишем уравнение равновесия сил в сечении с трещиной

$$\sigma_s A_s + N_p + \sigma_{sp}' A_s' - 2.667 \alpha R_{bt} A_s' (x - a') / z_p - \omega \sigma_b (bx + A_c) \pm P = 0.$$

Здесь сила *P* берется со знаком «плюс» при внецентренном сжатии и «минус» – при внецентренном растяжении, а при изгибе она равна нулю. Подставляя сюда выше определенные силы и напряжения, после преобразований запишем

$$0,256bz_p^2+\alpha A_s\frac{\psi_b}{\psi_s}(h_0-x)+\frac{0,375z_p\sigma'_{sp}A'_s}{R_{bt}}-\alpha A'_s(x-a')-\nu\omega x(bx+A_c)\pm\frac{Pz_p}{2,667R_{bt}}=0. \quad (2.52)$$

В этом уравнении произведение $\omega\nu$ слабо зависит от формы эпюры нормальных напряжений сжатой зоны. Например, при прямоугольной эпюре $\omega=1,$ а коэффициент $\nu$ можно принять 0,5 в связи с появлением при этом значительных неупругих деформаций; следовательно, $\omega\nu=0,5.$ При треугольной эпюре (упругие деформации) $\omega=0,5,$ а $\nu=1;$ следовательно, и в этом случае $\omega\nu=0,5.$ Поэтому реальная криволинейная эпюра в этой зоне для удобства расчета заменена прямоугольной эпюрой.

Запишем сумму моментов всех сил относительно центра тяжести сечения с трещиной

$$M_{pc}+\sigma_s A_s\left(\frac{h}{2}-a\right)+\sigma_b\omega bx\frac{h-x}{2}+\sigma_b\omega A_c\frac{h-h_c}{2}+2,667\alpha R_{bt}A'_s\frac{(x-a')\left(\frac{h}{2}-a'\right)}{z_p}-\sigma'_{sp}A'_s\left(\frac{h}{2}-a'\right)=M_{bn}.$$

Так как напряжение $\sigma_s$ в арматуре растянутой зоны возникает после того, как момент внешних сил *M* превысит момент силы предварительного натяжения $M_{pr}$, то в этом уравнений общий внешний момент равен

$$M_{bn}=M-\sigma_{sp}A_s(h/2-a), \quad (2.53)$$

где изгибающий момент *M* берется от внешних сил относительно центра тяжести бетона.

Подставляя в уравнение моментов выше определенные напряжения, после преобразований получим

$$0,157bz_p^3-0,256bz_p^2(h/2-x)+\alpha A_s\psi_b/\psi_s(h_0-x)(h/2-a)+\nu\omega x\frac{bx(h-x)+A_s(h-h_c)}{2}+$$
$$+\alpha A'_s(x-a')(h/2-a')-0,375z_p\frac{\sigma'_{sp}A'_s(h/2-a')+M_{bn}}{R_{bt}}=0. \quad (2.54)$$

Уравнения (2.52) и (2.54) образуют систему двух нелинейных алгебраических уравнений относительно двух неизвестных ($x$, $z_p$). После решения этой системы напряжение в арматуре определяется выражением (2.51).

Краевое напряжение в бетоне сжатой зоны определяет по диаграмме деформирования, подставив в нее деформацию $\varepsilon_b$ :

$$\sigma_b = 1,1R_{bn}\left[1-\exp\left(-2,4xR_{bt}/R_{bn}z_p\right)\right]. \qquad (2.55)$$

Длина трещины определяется по формуле

$$l_m = h - x - z_p. \qquad (2.56)$$

Для проведения расчетов нужно предварительно определить коэффициенты неравномерности. Нормы рекомендуют $\psi_b = 0.9,$ а

$$\psi_s = 1,25-\varphi_{es}\psi_m - \frac{1-\varphi_m^2}{\left(3,5-1,8\varphi_m\right)M/N_t e_{op}}, \qquad (2.57)$$

где суммарная продольная сила

$$N_t = \pm P + P_0;$$

$P_0 = \sigma_{sp}A_s$ –сила предварительного обжатия; $e_{op}$ –эксцентриситет суммарной силы относительно центра тяжести бетона.

Коэффициент $\varphi_{es}$ характеризует длительность действия нагрузки и профиль арматурных стержней. Он выбирается так: при кратковременной нагрузке для стержней периодического профиля $\varphi_{es}$=1,1; для гладких стержней и проволочной арматуры $\varphi_{es}$=1; при длительной нагрузке независимо от профиля арматуры $\varphi_{es}$=0,8.

Коэффициент

$$\varphi_m = M_{b,m}/M_{bn} \le 1,$$

где $M_{b,m}$ – момент воспринимаемый бетонным неармированным сечением перед образованием трещины, определяемый из уравнений (2.34) и (2.35). Для прямоугольного сечения из (2.34’) находим $\xi = 0,417,$ а из (2.35’) вычисляем

$$M_{b,m} = 0,252bh^2R_{bt}.$$

Для изгибаемых элементов без предварительного напряжения формула (2.57) упрощается

$$\psi_s = 1,25 - \varphi_{es}\varphi_m. \qquad (2.57')$$

Нормы так же допускают применение упрощенного выражения [4, 12]:

$$\psi_s = 1 - 0,85\varphi_m. \qquad (2.58)$$

Запишем разрешающие уравнения (2.52) и (2.54) для прямоугольного сечения с односторонней арматурой в растянутой зоне при изгибе

$$0,256\lambda^2 - 0,5\xi^2 + \alpha\mu\left(\bar{h} - \xi\right)\psi_b/\psi_s = 0, \qquad (2.59)$$

$$0,157\lambda^3 - 0,256\lambda^2\left(0,5 - \xi\right) + \alpha\mu\left(\bar{h} - \xi\right)\left(\bar{h} - 0,5\right)\frac{\psi_b}{\psi_s} + \xi^2\frac{1-\xi}{4} - \frac{0,357\lambda M_{bn}}{R_{bt}bh^2} = 0.$$

Здесь использованы безразмерные параметры (2.37) и добавлено

$$\lambda = z_p/h,\ \bar{h} = h_0/h.$$

Из первого уравнения этой системы

$$\lambda = \sqrt{1,95\xi^2 - 3,9\alpha\mu\left(\bar{h} - \xi\right)\psi_b/\psi_s}. \qquad (а)$$

Подинтегральное выражение должно быть больше нуля:

$$\xi \geq -\alpha\mu\,\psi_b/\psi_s + \sqrt{\left(\alpha\mu\,\psi_b/\psi_s\right)^2 + 2\alpha\mu\,\bar{h}\psi_b/\psi_s}. \qquad (б)$$

Из второго уравнения системы запишем

$$y = \frac{M_{bn}}{R_{bt}bh^2} = 0,418\lambda^2 - 0,683\lambda\left(0.5 - \xi\right) + \frac{2,667\alpha\mu\left(\bar{h} - \xi\right)\left(\bar{h} - 0,5\right)\psi_b/\psi_s + 0,667\xi^2\left(1 - \xi\right)}{\lambda}. \qquad (в)$$

Систему уравнений (а), (в) удобно решать графически. Задаемся $\xi$ по условию (б), по (а) определяем $\lambda$; далее вычисляем y из выражения (в). Повторяя эти процедуры, строим график функции $y = f(\xi)$. Пересечение графика с горизонталью $y = M_{bn}/R_{bt}bh^2$ дает значение $\xi$, удовлетворяющее решаемой системе. Далее из (а) определяем $\lambda$. Дальнейшее определение параметров напряженного состояния проводится по вышеизложенной методике.

Приведем расчет напряженного состояния ранее рассмотренного прямоугольного сечения без предварительного напряжения от изгибающего момента $M=18$ *кНм*. Для этого сечения ранееопределено

$$\alpha\mu = 0,056,\ \bar{h} = 0,907.$$

Определим коэффициент

$$\varphi_m = 0,252\cdot 0,153\cdot 0,301^2\cdot 2,1\cdot 10^3 / 18 = 0,408.$$

Тогда по (2.58)

$$\psi_s = 1 - 0,85\cdot 0,408 = 0,654.$$

Безразмерный момент

$$y = M / R_{bt} b h^2 = 0,618.$$

Разрешающая система (а), (в) примет вид:

$$\lambda = \sqrt{1,95\xi^2 - 0,3(0,907-\xi)},\ \xi \ge 0,305;$$

$$y = 0,418\lambda^2 - 0,683\lambda(0,5-\xi) + \left[0,084(0,907-\xi) + 0,667\xi^2(1-\xi)\right]/\lambda.$$

Решая систему получим, $\xi = 0,32$, $\lambda = 0,1536$. Длина трещины $l_m = h(1-\xi-\lambda) = 15,8\ см$.

Напряжения в арматуре по (2.51)

$$\sigma_s = \frac{2,667\cdot 6,45\cdot 2,1(0,9/0,654)(0,907-0,32)}{0,1536} = 189,8\ МПа.$$

Максимальное сжимающее напряжение в бетоне по (2.55)

$$\sigma_b = 1,1\cdot 29\left[1-\exp(-2,4\cdot 0,32\cdot 2,1/29\cdot 0,1536)\right] = 9,7 МПа.$$

Эта задача далее была решена численным методом с помощью программы ЛИРА. Получены следующие результаты (в скобах указан % расхождения результатов):

$$\sigma_s = 184{,}1\ МПа\ (3\%),\ \sigma_b = 9{,}2\ МПа\ (5.4\%),\ l_m = 16{,}5\ см\ (4.2\%).$$

Сравнение результатов расчета указывает на хорошую точность предлагаемого метода расчета напряженного состояния железобетонных балок с трещинами.

Этот метод в отличие от существующих аналитических методов позволяет определить длину трещины в сечении. Это очень важно для определения в дальнейшем параметров механика разрушения и оценки на этой основе трещиностойкости конструкций.

Для железобетонных конструкций с трещинами накладываются ограничения на ширину раскрытия трещины, которая определяется по формуле [5, 6, 9]

$$a_m = \psi_s\left(\sigma_s / E_s\right) h_m, \qquad (2.60)$$

где $h_m$ –шаг трещин или длина участка между трещинами.

Вычисление коэффициента $\psi_s$ и напряжения в арматуре рассмотрены выше. Определим шаг трещин по методике, изложенной в [6].

Приращение напряжений в растянутой арматуре в сечении с трещиной $\sigma_{s,m}$, после того как момент внешних сил $M$ превысит момент предварительного обжатия $M_{pr}$, находят из условия, что при появлении трещины изгибающий момент в сечении не меняется и равен $M_m$. Из этого запишем

$$M_m - M_{pr} = R_{bt} W_{pe} = \sigma_{s,m} A_{sp}\left(h/2 - a\right) = \sigma_{s,m} W_s,$$

где упругопластический момент сопротивления $W_{pe}$ определяется из (2.35)или (2.35$'$) без учета сил предварительного натяжения.

Отсюда находим

$$\sigma_{s,m} = R_{bt} W_{pe} / W_s.$$

Расстояние между трещинами при чистом изгибе $h_m$ определяют из условия, что разность усилий в растянутой арматуре в сечениях с трещиной и между трещинами уравновешивается усилием сцепления арматуры с бетоном. Тогда

$$\left(\sigma_{sp} + \sigma_{s,m}\right) A_{sp} - \left(\sigma_{sp} + 2\alpha R_{bt}\right) A_{sp} = \tau_c \omega a h_m,$$

где $\tau_c$ –максимальное напряжение сцепления арматуры с бетоном; $a$ – периметр сечения арматуры; $\omega$ – коэффициент полноты эпюры сцепления.

После преобразовании находим

$$h_m = \left[\left(W_{pe}/\alpha W_s - 2\right)\alpha A_{sp} R_{bt}\right]/\tau_c a\omega .$$

Введем обозначения:

$$u = A_{sp}/a,\ \eta = R_{bt}/\tau_c\omega$$

и запишем

$$h_m = \left(W_{pe}/\alpha W_s - 2\right)\alpha u\eta . \qquad (2.61)$$

На основании опытных данных выявлено, что коэффициент $\eta$ зависит от вида и профиля арматуры[6]. Для стержневой арматуры периодического профиля $\eta = 0,7$ ; для гладких стержней $\eta = 1$; для рифленой проволоки и канатов – 0,9; для гладкой проволоки – 1,25.

Нормы рекомендует ширину раскрытия трещин определять по эмпирической формуле [4, 5, 6]

$$a_m = 20\left(3,5 - 100\mu\right)\delta\eta_a\varphi_e\left(\sigma_s/E_s\right)\sqrt[3]{d}\ \text{(мм)}. \qquad (2.62)$$

Здесь коэффициент $\delta = 1$ для изгибаемых и внецентренно сжатых элементов; коэффициент $\eta$ зависит от вида и профиля растянутой арматуры: для стержней периодического профиля $\eta = 1$; для гладких стержней $\eta = 1,3$ ; для проволок и канатов –1,2. Коэффициент $\varphi_e$ учитывает длительность действия нагрузки: при кратковременной нагрузке $\varphi_e = 1$; при продолжительной нагрузке для тяжелого бетона $\varphi_e = 1,6 - 15\mu$; для легкого бетона – 1,2; d– диаметр арматуры (мм).

2.3.3 Применение численных методов

Нелинейные задачи механики деформируемого твердого тела обычно не имеют точного аналитического решения. Предложенный выше аналитический метод расчета напряженного состояния балки с трещинами также является приближенным. Точность таких методов зависит от точности выполнения исходных гипотез, которая зависит от уровня напряжений, и точности решения системы нелинейных уравнений. В связи с бурным развитием компьютерной техники и созданием все новых универсальных программных комплексов в настоящее время нелинейные задачи с необходимой точностью решаются численными методами.

Изложим алгоритм численного расчета напряженного состояния железобетонного элемента с трещинами. В качестве исходного положения

принимается описание диаграммы деформирования материалов: бетона и арматуры. Это описание может быть табличным или аналитическим.

Для бетона наиболее часто применяется экспоненциальный закон (2.14) (нормативная прочность) или его аналог, в котором вместо нормативного сопротивления подставляется расчетное сопротивление. Может также применяться экспоненциальный закон в следующем виде:

$$\sigma_b = E_b \varepsilon_b \exp\left(\varepsilon_{rb}^{1/\gamma} \gamma \varepsilon_{rb}^{1/\gamma}\right),\ \gamma = \ln\left(R_b / E_b \varepsilon_{rb}\right), \tag{2.63}$$

где $R_b$ – расчетное сопротивление бетона на сжатие; $\varepsilon_{rb}$ – деформация бетона соответствующая максимальному напряжению.

Эти деформации берутся из диаграммы или определяются из выражения

$$\varepsilon_{rb} = R_{bn}\left(0{,}12 + 18{,}8/R_{bn}\right)\cdot 10^{-4},\ \varepsilon_{rbt} = 1{,}5\, R_{btn}/E_b\,.$$

В еврокодах часто используется следующее выражение [5]

$$\sigma_b = R_b \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta},\ \eta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{rb}},\ k = \frac{E_b \varepsilon_{rb}}{R_b}. \tag{2.64}$$

Для бетона параметры этих законов при сжатии и растяжении будут разными.

Для арматуры чаще всего используется кусочно-линейный закон. Для материалов, имеющих физический предел текучести используется билинейная диаграмма Прандтля. Для материалов с условным пределом текучести принимается диаграмма, состоящая из трех прямолинейных участков с тремя базовыми точками в местах соединения отрезков. Диаграмма деформирования арматуры при растяжении и сжатии принимается одинаковой.

В расчетах могут приниматься любые зависимости между напряжениями и деформациями, соответствующие поведению материала. Многие из них описаны в работе [4].

При численном решении задачи поперечное сечение железобетонного элемента разбивается на элементарные полосы, в пределах которых напряжения не меняются. Считается справедливой гипотеза плоских сечений, то есть принимается, что деформации по высоте сечения меняются по линейному закону.

Внутренние усилия по сечению определяются путем суммирования усилий по элементарным полосам, в пределах которых принимаются средние значения напряжений. Сжимающие напряжения и деформации берутся со знаком «минус», растягивающие напряжения и деформации удлинения – со знаком

«плюс». Момент внутренних сил также определяется суммированием моментов сил, действующих по элементарным площадкам.

При прямом изгибе сечения удобно делить на элементарные полосы и отдельные арматуры, положение их определять координатой центра тяжести полосы или арматуры, отсчитываемой от нижнего края сечения – $y_{bi}, y_{sj}$.

Рассечем балку по опасному сечению и составим условия равновесия отсеченной части балки. С учетом вышеизложенного эти условия при изгибе примут вид

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma_{bi}A_{bi}+\sum_{j=1}^{k}\sigma_{sj}A_{sj}=0, \qquad (2.65)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma_{bi}A_{bi}\left(y_0-y_{bi}\right)+\sum_{j=1}^{k}\sigma_{sj}A_{sj}\left(y_0-y_{sj}\right)-M=0.$$

Здесь $\sigma_{bi}$, $\sigma_{sj}$ – нормальные напряжения на i-ой элементарной полосе бетона и j-ой арматуре; $A_{bi}$, $A_{sj}$ – площади элементарных полос бетона и j-ой арматуры; $y_0$ – расстояние от нижнего края до центра тяжести сечения; n, k– число полос и арматурных включений; $M$ – изгибающий момент от внешней нагрузки.

Алгоритм решения задачи предусматривает пошаговый метод последовательных нагружений на каждом этапе которого реализован итерационный процесс вычисления деформаций в элементарных площадках.

Последовательность расчета напряженного состояния в сечении будет следующей.

1. Определяется кривизна оси изгибаемого элемента

$$\frac{1}{r}=\frac{M}{\sum_{i=1}^{n}E_{bi}A_{bi}\left(y_0-y_{bi}\right)^2+\sum_{j=1}^{k}E_{sj}A_{sj}\left(y_0-y_{sj}\right)^2}. \qquad (2.66)$$

На первом шаге первой ступени нагружения модули деформаций берутся равными модулям упругости материалов. В дальнейшем они заменяются секущими модулями. Момент $M$ соответствует ступени нагружения.

2. На основе гипотезы плоских сечений определяются деформации элементарных полос и отдельных арматур

$$E_{bi}=\frac{y_0-y_{bi}}{r},\quad E_{sj}=\frac{y_0-y_{sj}}{r}. \qquad (2.67)$$

3. По диаграмме деформирования определяются напряжения

$$\sigma_{bi} = f_b(\varepsilon_{bi}), \quad \sigma_{sj} = f_{sj}(\varepsilon_{sj}).$$

4. Определяют секущие модули бетона и арматур

$$E'_{bi} = \sigma_{bi}/\varepsilon_{bi}, \quad E'_{sj} = \sigma_{sj}/\varepsilon_{sj}.$$

5. Если растягивающее напряжение в бетоне элементарной полосы превышает предельное значение, это свидетельствует об образовании трещины в этой полосе и в дальнейшем она исключается из расчета.

6. Проверяется выполнение уравнений равновесия (2.65).

7. Проверяется критерии окончания итерационного процесса

$$\left|\varepsilon_{bi} - \varepsilon_{b,i-1}\right| \le \delta, \quad \left|\varepsilon_{sj} - \varepsilon_{s,j-1}\right| = \delta,$$

где $\delta$ – критерии сходимости.

8. Если критерии сходимости не выполняется, то процесс расчета повторяется, начиная с пункта 1. Если критерии сходимости выполняется, то производится увеличение нагрузки на одну ступень и расчет повторяется.

Пункты 1-8 повторяются до достижения верхнего значения нагрузки.

Изложенный алгоритм легко программируется, он хорошо сочетается с процедурой метода конечных элементов. Так для балочных элементов поперечное сечение разбивается на полосы, расчет напряжений производится по сечениям, где стыкуются конечные элементы. Для объемных элементов площади оснований конечных элементов являются элементарными площадками, расчет напряжений выполняется по указанным заранее сечениям.

Эта численная методика расчета наиболее полно реализована в ПК ЛИРА. Последовательность расчета по этой программе приведена в §2.1.4. Дополнительно здесь изложим реализацию пошагового нагружения и организацию итерационного процесса.

**Задание нагрузок**

1. С помощью **Панели выбора** выделяем узлы, в которых прикладывается нагрузка.

2. Через меню **Нагрузки** на закладке **Нагрузки в узлах** вызывается диалоговое окно **Задание нагрузки**.

3. В этом окне выбираем систему координат и ось, вдоль которой задается нагрузка (**z**).

4. Нажатием кнопки вида нагрузки вызываем диалоговое окно**Параметры**.

5. В этом окне задается значение нагрузки.

6. Кнопка **Подтвердить**.

**Моделирование нелинейных загружений**

1. В меню **Нагрузки** вызывается диалоговое окно **Моделирование нелинейных загружений конструкции**. Если имеется несколько нагрузок, то имеет значение и порядок загружения.

2. В открывшемся окне надо нажать кнопку **Добавить**, появится окно загружения.

3. В нем задаются следующие параметры:

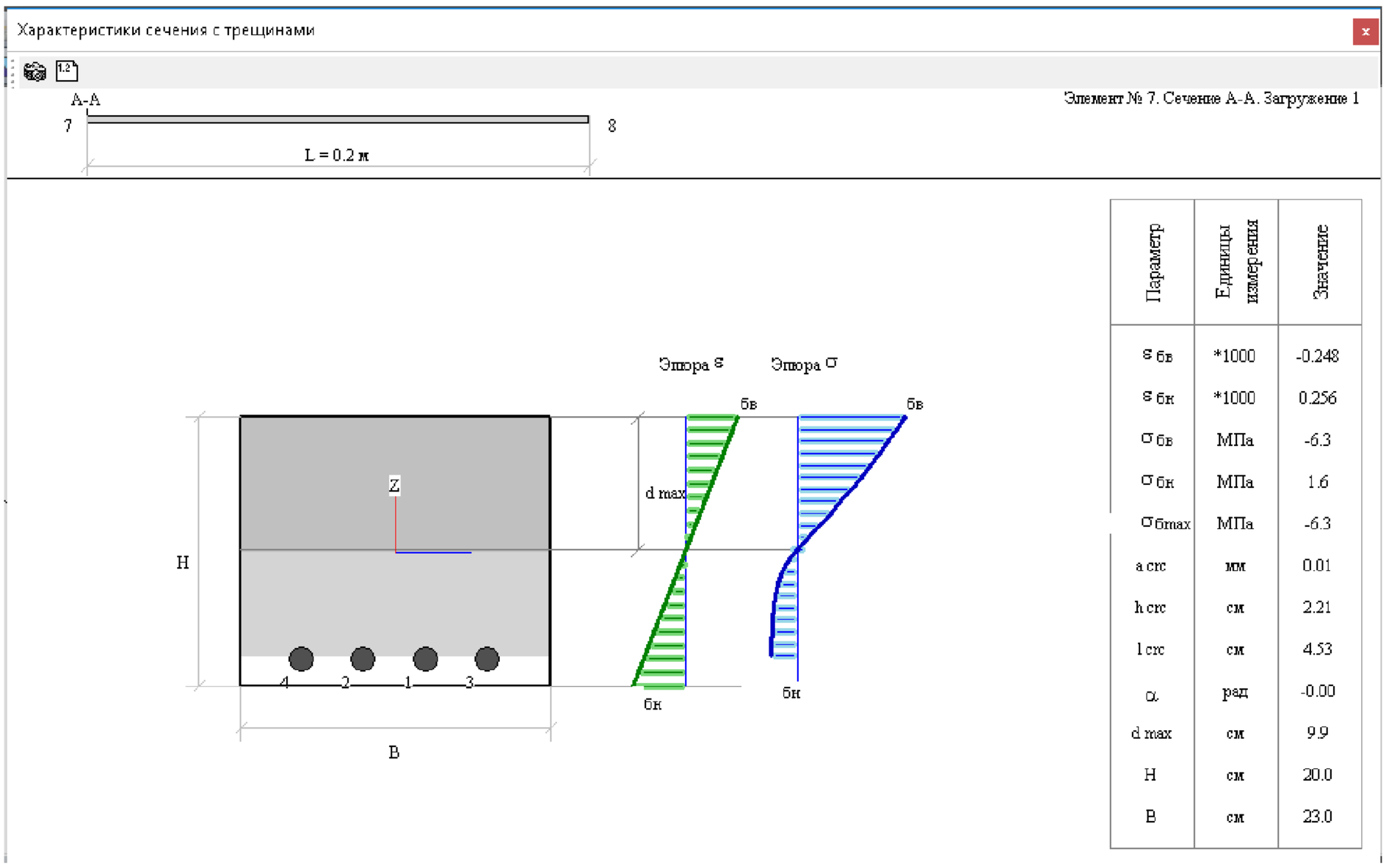
- номер загружения;
- в раскрывающем списке **Метод расчета** выбираем строку **Простой шаговый**;
- включаем радио-кнопку **Равномерные шаги** и задаем количество шагов;
- в раскрывающемся списке **Печать** выбираем строку **Перемещения и усилия после каждого шага**;
- в раскрывающемся списке **Выбор промежуточных результатов** выбираем строку **Выводить все**.

4. Кнопка **Подтвердить**.

Аналогично вводятся и другие загружения (если имеются). При этом после номера загружения надо установить флажок **Учесть предисторию**. Задание нагрузок от собственного веса полностью автоматизировано: из меню **Нагрузки** достаточно ввести команду **Добавить собственный вес**.

Организация итерационного процесса полностью автоматизировано. Его опции установлены по умолчанию или выбираются автоматически.

Просмотр результатов расчета производится как изложено выше (§2.1.4.). Ниже приведено окно "характеристики сечения с трещинами" с результатами расчета.




| Параметр | Единицы измерения | Значение |
|---|---|---|
| $\varepsilon_{бв}$ | *1000 | -0.248 |
| $\varepsilon_{бн}$ | *1000 | 0.256 |
| $\sigma_{бв}$ | МПа | -6.3 |
| $\sigma_{бн}$ | МПа | 1.6 |
| $\sigma_{бmax}$ | МПа | -6.3 |
| a crc | мм | 0.01 |
| h crc | см | 2.21 |
| l crc | см | 4.53 |
| $\alpha$ | рад | -0.00 |
| d max | см | 9.9 |
| H | см | 20.0 |
| B | см | 23.0 |

Рисунок 2.5. Окно с результатами расчета

## 2.4. Регрессионные зависимости для параметров напряженного состояния при изгибе

Многочисленные расчеты по определению напряженного состояния в железобетонных балках при изгибе показали, что основные факторы, влияющие на параметры напряженного состояния в сечениях с трещинамиостаются теми же, что при определении предварительных напряжений. Для вывода регрессионных зависимостей параметров напряженного состояния от этих факторов проведем многофакторный эксперимент с помощью ПК ЛИРА. Эти зависимости будем определять для прямоугольного сечения из бетонов класса B25 и B40 с арматурой класса A-III.

В качестве варьируемых параметров выбираем размеры сечения h, b, процент армирования $\mu$, модуль упругости бетона $E$ и изгибающий момент $M$. Пределы изменения первых четырех параметров оставляем прежними (таблица 2.1), а изгибающий момент будем менять от момента по образованию трещины $M_m$ до разрушающего момента $M_p$. Так как эти моменты зависят от размеров сечения, то в качестве варьируемого параметра выберем безразмерный параметр нагрузки m, равный отношению изгибающего момента к разрушающему моменту конкретной балки ($m = M/M_p$). При анализе напряженного состояния балок с трещинами этот параметр должен меняться от значения $M_m/M_p$ до единицы.

В параграфе 2.2.2 составлена таблица разрушающих моментов для всех компьютерных опытов (таблица 2.4). Там же определены экстремальные значения параметра $M_m/M_p$. Этот параметр практически не зависит от класса бетона и меняется от 0,15 до 0,34 в зависимости от процента армирования. При проведении экспериментов параметр mбудем менять от 0,2 до 0,92.

Таким образом, варьируемых параметров будет пять. При рациональном планировании экспериментов их будем менять на пяти равностоящих уровнях. Тогда каждый эксперимент будет состоять из 25 опытов. Исходные данные для каждого эксперимента согласно матрице рационального планирования, приведены в таблицах 2.5 и 2.6 (первые 6 столбцов).

Каждая строка этих таблиц – это один опыт (расчетная задача в ПК ЛИРА). В результате расчета определяем максимальное сжимающее напряжение и деформацию ($\sigma_b$, $\varepsilon_c$) в бетоне, высоту сжатой зоны бетона ($x$), усилие в арматуре ($N_a$), а также длину $l_m$, ширину раскрытия $a_m$ и шаг трещин $h_m$. Они определялись для сечения, находящегося в состоянии чистого изгиба. Результаты расчетов приведены в таблице 2.5 (столбцы 7÷14) для бетона B25 и в таблице 2.6 для бетона B40.

Регрессионные зависимости будем определять для максимального сжимающего напряжения в бетоне $\sigma_b$, для напряжения в арматуре $\sigma_s = N_a/A_s$ для длины трещины $l_m$, высоты сжатой зоны $x$, ширины раскрытия трещины $a_m$ и максимального прогиба $f_m$. Для этого применим методику нетрадиционного

регрессионного анализа и программу ANETR для обработки данных таблиц 2.5 и 2.6.

Приведем окончательно сформированные многомерные модели для параметров напряженного состояния в бетоне В25. Регрессионная зависимость для максимального сжимающего напряжения в бетоне

$$\sigma_b = m/(0,035+0,02m)+5,6\cdot10^{-4}h^2-0,033h+1,68/b- \\ -0,7\mu^2+4,34\mu+1,367\cdot10^{-8}E^2-6,41\cdot10^{-4}E+2,392\ (\text{МПа}). \qquad (2.68)$$

В это выражение переменные нужно подставлять в тех единицах, в которых они указаны в таблице 2.5. Результаты также будут в тех единицах, в которых приведены выходные величины в таблице 2.5.

Среднеквадратическое отклонение модели составляет 15,4%, а коэффициент множественной корреляций $R=0,985$, что говорит о достаточно высокой корректности эксперимента и полноте охвата моделью всех факторов, участвующих в эксперименте.Полученные регрессионные зависимости справедливы в пределах принятого изменения параметров модели.

Таблица 2.5 – Матрица планирования и результаты экспериментов на изгиб для бетона В25

| № | m/M, кнм | h,см | b,см | $\mu/A_s$,см$^2$ | E,МПа | X, см | $\sigma_b$,МПа | $N_a$, кн | $l_m$, см | $a_m$,мм | $h_m$,см | $f_m$,мм | $10^3\varepsilon_c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,2/ 10,8 | 20 | 23 | 3,5 /16,1 | 30000 | 9.9 | 6.3 | 16.8 | 2.21 | 0.01 | 4.53 | 1.37 | 0.248 |
| 2 | 0,38/ 61,2 | 30 | 32 | 4,5 /43,2 | 18000 | 18.4 | 9.3 | 41.2 | 6.17 | 0.02 | 8.32 | 1.686 | 0.675 |
| 3 | 0,56/ 58 | 40 | 41 | 0,5 /8,2 | 21000 | 11.2 | 7.7 | 87.2 | 23.94 | 0.19 | 23.03 | 1.32 | 0.455 |
| 4 | 0,74/ 37,4 | 50 | 5 | 1,5 /3,75 | 24000 | 22 | 14.9 | 100 | 24.32 | 0.09 | 8.25 | 2.166 | 1.2 |
| 5 | 0,92/ 6,3 | 10 | 14 | 2,5 /3,5 | 27000 | 6.38 | 18.5 | 129.5 | 3.62 | 0.03 |  | 0.825 | 1.83 |
| 6 | 0,2/ 29,4 | 30 | 41 | 1,5/18,5 | 27000 | 12.9 | 5.3 | 24 | 5.77 | 0.02 | 8.97 | 0.834 | 0.227 |
| 7 | 0,38/ 16,8 | 40 | 5 | 2,5 /5,0 | 30000 | 18.5 | 11.1 | 54.9 | 14.74 | 0.03 | 5.89 | 1.454 | 0.547 |
| 8 | 0,56/121,4 | 50 | 14 | 3,5/24,5 | 18000 | 30.2 | 13.9 | 116.6 | 15.31 | 0.05 | 9.57 | 1.777 | 1.335 |
| 9 | 0,74/ 7,8 | 10 | 23 | 4,5/10,4 | 21000 | 5.9 | 15 | 62.3 | 3.2 | 0.03 | 6.59 | 9.43 | 1.351 |
| 10 | 0,92/ 18,2 | 20 | 32 | 0,5 /3,2 | 24000 | 5.4 | 11.8 | 114.4 | 13.15 | 0.28 | 20.19 | 4.85 | 0.756 |
| 11 | 0,2/ 25,6 | 40 | 14 | 4,5/25,2 | 24000 | 23.6 | 5.3 | 24.4 | 0 | 0 | 0 | 0.608 | 0.256 |
| 12 | 0,38/ 34,6 | 50 | 23 | 0,5/5,75 | 27000 | 13.4 | 6.1 | 76.4 | 26.56 | 0.14 | 27.12 | 0.603 | 0.269 |
| 13 | 0,56/ 6,6 | 10 | 32 | 1,5 /4,8 | 30000 | 3.8 | 13.4 | 93.1 | 5.24 | 0.07 | 8.86 | 8.615 | 0.757 |
| 14 | 0,74/ 65,2 | 20 | 41 | 2,5/20,5 | 18000 | 11.3 | 16.2 | 120.4 | 7.54 | 0.07 | 7.58 | 6.117 | 1.94 |
| 15 | 0,92/ 24,8 | 30 | 5 | 3,5 /5,25 | 21000 | 25.8 | 18.5 | 194.2 | 8.6 | 0.08 | - | 4.758 | 2.35 |
| 16 | 0,2/ 88,9 | 50 | 32 | 2,5 /40 | 21000 | 25.7 | 5.9 | 26 | 8.34 | 0.01 | 7.06 | 0.601 | 0.324 |
| 17 | 0,38/ 8,2 | 10 | 41 | 3,5/14,4 | 24000 | 5.2 | 10.6 | 40.4 | 3.22 | 0.02 | 5.66 | 5.918 | 0.639 |
| 18 | 0,56/ 6 | 20 | 5 | 4,5 /4,5 | 27000 | 11.4 | 13.2 | 43.2 | 5.78 | 0.02 | 4.88 | 3.608 | 0.819 |
| 19 | 0,74/ 14,6 | 30 | 14 | 0,5 /2,1 | 30000 | 6.7 | 10.7 | 67.1 | 20.64 | 0.2 | 16.08 | 2.406 | 0.517 |
| 20 | 0,92/138,6 | 40 | 23 | 1,5/13,8 | 18000 | 15.3 | 18.5 | 510.6 | 24.7 | 0.23 |  | 3.155 | 2.74 |
| 21 | 0,2/ 0,15 | 10 | 5 | 0,5/0,25 | 18000 | 4.7 | 1.9 | 0.4 | 0 | 0 | 0 | 1.559 | 0.108 |
| 22 | 0,38/ 8,4 | 20 | 14 | 1,5 /4,2 | 21000 | 8.4 | 9.1 | 54.9 | 8.59 | 0.05 | 8.84 | 2.754 | 0.564 |
| 23 | 0,56/ 63,4 | 30 | 23 | 2,5/17,3 | 24000 | 15.3 | 14.1 | 73.6 | 11.86 | 0.04 | 6.22 | 3.015 | 1.057 |
| 24 | 0,74/ 231 | 40 | 32 | 3,5 /44,8 | 27000 | 23.2 | 17 | 93.5 | 13.83 | 0.04 | 5.23 | 2.873 | 1.592 |
| 25 | 0,92/543,2 | 50 | 41 | 4,5 /92,2 | 30000 | 31.4 | 18 | 164 | 15.25 | 0.04 | 6.28 | 2.467 | 1.877 |

Таблица 2.6 – Матрица планирования и результаты экспериментов на изгиб для бетона В40

| № | m/M, кнм | h,см | b,см | μ /$A_s$,см$^2$ | E,МПа | X, см | $\sigma_b$,МПа | $N_a$, кн | $l_m$, см | $a_m$,мм | $h_m$,см | $f_m$,мм | $10^3\varepsilon_c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,2/ 14,4 | 20 | 23 | 3,5 /16,1 | 36500 | 10.3 | 6.5 | 12.3 | 0 | 0 | 0 | 1.061 | 0.2 |
| 2 | 0,38/ 96,9 | 30 | 32 | 4,5 /43,2 | 20500 | 17.6 | 10 | 39.7 | 6.26 | 0.02 | 7.35 | 1.275 | 0.569 |
| 3 | 0,56/ 59,5 | 40 | 41 | 0,5 /8,2 | 24500 | 10.4 | 8.6 | 85.8 | 24.46 | 0.19 | 22.91 | 1.064 | 0.406 |
| 4 | 0,74/ 40,8 | 50 | 5 | 1,5 /3,75 | 28500 | 19.5 | 17.8 | 96.7 | 26.31 | 0.08 | 7.97 | 1.756 | 0.931 |
| 5 | 0,92/ 7,6 | 10 | 14 | 2,5 /3,5 | 32500 | 4.5 | 23.9 | 93.5 | 4.89 | 0.05 | 4,92 | 12.21 | 1.475 |
| 6 | 0,2/ 32 | 30 | 41 | 1,5/18,5 | 32500 | 14 | 5 | 14.7 | 0 | 0 | 0 | 0.665 | 0.164 |
| 7 | 0,38/ 19,9 | 40 | 5 | 2,5 /5,0 | 36500 | 17 | 12.6 | 52.8 | 15.39 | 0.02 | 5.78 | 1.131 | 0.447 |
| 8 | 0,56/158,9 | 50 | 14 | 3,5/24,5 | 20500 | 28 | 15.7 | 112.5 | 16.68 | 0.05 | 8.45 | 1.365 | 1.05 |
| 9 | 0,74/ 13,4 | 10 | 23 | 4,5/10,4 | 24500 | 5.5 | 17.1 | 59.7 | 3.45 | 0.03 | 5.77 | 7.103 | 1.018 |
| 10 | 0,92/ 18,7 | 20 | 32 | 0,5 /3,2 | 28500 | 4.9 | 13.8 | 112.3 | 13.61 | 0.28 | 20.07 | 4.0 | 0.638 |
| 11 | 0,2/ 40,4 | 40 | 14 | 4,5/25,2 | 28500 | 22.8 | 5.6 | 22.2 | 0 | 0 | 0 | 0.467 | 0.214 |
| 12 | 0,38/ 35,5 | 50 | 23 | 0,5/5,75 | 32500 | 12.7 | 6.9 | 72.6 | 26.51 | 0.13 | 26.31 | 0.461 | 0.237 |
| 13 | 0,56/ 7,2 | 10 | 32 | 1,5 /4,8 | 36500 | 3.4 | 15.7 | 90 | 5.5 | 0.07 | 8.84 | 6.838 | 0.609 |
| 14 | 0,74/ 77,5 | 20 | 41 | 2,5/20,5 | 20500 | 9.2 | 19.1 | 144.5 | 9.54 | 0.08 | 7.21 | 4.811 | 1.439 |
| 15 | 0,92/ 33 | 30 | 5 | 3,5 /5,25 | 24500 | 16.8 | 23.1 | 119.4 | 11.28 | 0.05 | 5.8 | 3.717 | 1.798 |
| 16 | 0,2/105,1 | 50 | 32 | 2,5 /40 | 24500 | 25.1 | 6.2 | 23.7 | 6.94 | 0.01 | 6.63 | 0.47 | 0.28 |
| 17 | 0,38/ 11,1 | 10 | 41 | 3,5/14,4 | 28500 | 4.1 | 11.8 | 54.5 | 4.32 | 0.02 | 5.03 | 4.474 | 0.517 |
| 18 | 0,56/ 9,7 | 20 | 5 | 4,5 /4,5 | 32500 | 10.5 | 15 | 41.3 | 6.18 | 0.01 | 4.04 | 2.767 | 0.627 |
| 19 | 0,74/ 15 | 30 | 14 | 0,5 /2,1 | 36500 | 6.7 | 10.7 | 67.4 | 20.64 | 0.2 | 16.08 | 2.406 | 0.517 |
| 20 | 0,92/148,7 | 40 | 23 | 1,5/13,8 | 20500 | 17.6 | 19.7 | 154.3 | 20.07 | 0.12 | 9.3 | 2.846 | 1.517 |
| 21 | 0,2/ 0,15 | 10 | 5 | 0,5/0,25 | 20500 | 4.8 | 1.9 | 0.4 | 0 | 0 | 0 | 1.219 | 0.092 |
| 22 | 0,38/ 8,7 | 20 | 14 | 1,5 /4,2 | 24500 | 7.1 | 10 | 64 | 9.98 | 0.05 | 8.72 | 2.202 | 0.487 |
| 23 | 0,56/ 75 | 30 | 23 | 2,5/17,3 | 28500 | 13.8 | 16.4 | 70.8 | 12.83 | 0.04 | 5.64 | 2.364 | 0.82 |
| 24 | 0,74/305,8 | 40 | 32 | 3,5 /44,8 | 32500 | 20.4 | 20.8 | 88.4 | 15.88 | 0.03 | 4.85 | 2.204 | 1.086 |
| 25 | 0,92/ 850 | 50 | 41 | 4,5 /92,2 | 36500 | 27.2 | 22.7 | 152.4 | 18.19 | 0.04 | 5.47 | 1.854 | 1.169 |

Регрессионная зависимость для напряжения в арматуре имеет вид:

$$\sigma_s = 332,86m^{1.97} - 0,07h^2 + 3,523h - 3,463b - 39,52\mu - \\ -6,24\cdot 10^{-7}E^2 + 0,0305E - 212,2\ (\text{МПа}),\ \text{СКО} = 33\%,\ R = 0,92. \qquad (2.69)$$

Длина трещины определяется выражением

$$l_m = 0,378h - 2,653/m - 2,14\cdot 10^{-3}b^2 + 0.097b - 2.665\mu + \\ +1,12\cdot 10^{-8}E^2 - 4,56\cdot 10^{-4}E + 16,05\ (\text{см}),\ \text{СКО} = 24,9\%,\quad R = 0,952. \qquad (2.70)$$

Для высоты сжатой зоны получено

$$x = 21,574m^2 - 22,693m + 0,478h + 5,6\cdot 10^{-3}b^2 - 0,309b + 10,83\mu^{0,384} + \\ +E/(8,858\cdot 10^{-2}E - 464,29) - 21,19\ (см),\quad \text{СКО} = 26\%,\quad R = 0,955. \qquad (2.71)$$

Регрессионная зависимость для ширины раскрытия трещины

$$a_m = 0,183m - 8,73\cdot 10^{-5}h^2 + 6,25\cdot 10^{-3}h - 1,32\cdot 10^{-4}b^2 + \\ +6,78\cdot 10^{-3}b - 0,154\lg\mu + 1,17\cdot 10^{3}E^{-1} - 0,189\ (\text{мм}),\ \text{СКО} = 32\%,\quad R = 0,904. \qquad (2.72)$$

Выражение для максимального прогиба имеет вид

$$f_m = -13,436m^2 + 18,594m - 5,524\lg(h) + 0,0366b - 0,621/\mu - 4,056\cdot 10^{-5} + 6,06\ (мм),$$
$$\text{СКО}=34,7\%,\quad R=0,921. \qquad (2.73)$$

Обработка результатов аналогичных компьютерных экспериментов для бетона В40 (таблица 2.6) дала следующие регрессионные зависимости:

$$\sigma_b = m/(0,036 + 0,009m) + 0,0029h^2 - 0,163h + \\ +4,31/b - 1,08\mu^2 + 6,61\mu + 5,1\cdot 10^{-5}E^2 - 7,7\ (\text{МПа}); \qquad (2.68')$$

$$\sigma_s = 238,9m - 0,044h^2 + 1,72h - 2,544b - 37\mu - 5,83\cdot 10^{-7}E^2 + 0,035E - 391,6\ (\text{МПа}); \qquad (2.69')$$

$$l_m = h/(2,742 - 1,28\cdot 10^{-3}h) - 3,37/m - 4,81/b - 10\lg\mu + 5,85\cdot 10^{-5}E + 8,91\ (\text{см}); \qquad (2.70')$$

$$x = 24,16m^2 - 26,17m + h/(2,304 - 1,53\cdot 10^{-3}h) + 3,119b + 9,252\lg\mu + \\ +2,792\cdot 10^{-8}E^2 - 1,69\cdot 10^{-3}E + 27,14\ (см); \qquad (2.71')$$

$$a_m = 0,153\lg m - 5,63\cdot 10^{-5}h^2 + 3,85\cdot 10^{-3}h - 0,233/b + 0,077/\mu - 159/E + 0,025\ (\text{мм}). \qquad (2.72')$$

$$f_m = 5,58m + (0,017h - 0,0135)^{-1} - 2,184\cdot 10^{-3}b^2 + 0,104b - 0,329\mu^2 + 1,676\mu - \\ - 6,87\cdot 10^{-9}E^2 + 4,297\cdot 10^{-4}E - 11,94\ (мм). \qquad (2.73')$$

Среднеквадратические отклонения, коэффициенты корреляции моделей примерно такие же, что для бетона В25.

Эти зависимости получены для железобетонных балок без предварительного напряжения. Если нужно рассчитать на изгиб предварительно напряженную балку, то численный расчет с помощью ПК ЛИРА на основе балочного элемента провести невозможно. В этом случае численный расчет нужно вести в объемной постановке. При этом сложно определить длину трещины, так как программа автоматически не исключает из расчета разрушенные элементы (элементы с трещиной). Для этого нужно вести повторный расчет с исключением зон, охваченных трещиной. Исключение этих зон в ПК ЛИРА представляет достаточно сложную проблему. Наиболее простой путь заключается в выделении этой области и присвоении ее элементам очень маленького модуля упругости (например, в $10^5$ раз меньше обычного). Для достоверности определения длины трещины эту операцию возможно придется повторить несколько раз.

В связи с этим расчет предварительно напряженных железобетонных балок с трещиной рекомендуем вести приближенным аналитическим методом, предложенным в данной работе (§ 2.3.2). Однако, если имеются регрессионные зависимости для определения напряженного состояния при изгибе, то расчет предварительно напряженной железобетонной балки с трещинами можно выполнить упрощенным способом, основанном на гипотезе плоских сечений.

Алгоритм такого расчета можно представить в следующем виде.

1. Из регрессионных зависимостей при изгибе найдем максимальное сжимающее напряжение в бетоне $\sigma_{b2}$и длину трещины $l_{m2}$.

2. Из диаграммы деформирования бетона найдем наибольшую деформацию в бетоне $\varepsilon_{c2}$и растягивающую деформацию у вершины трещины $\varepsilon_{m2}$от изгиба

$$\varepsilon_{c2} = -\left(R_{bn}/0,9E_b\right)\ln\left(1-\sigma_{b2}/1,1R_{bn}\right), \quad \varepsilon_{m2} = 2,667R_{bt}/E_b.$$

3. Из регрессионных зависимостей для предварительно напряженного состояния найдем максимальное сжимающее напряжение в бетоне $\sigma_{b1}$и высоту сжатой зоны $x_1$.

4. Определим максимальную сжимающую деформацию от предварительного натяжения арматуры

$$\varepsilon_{c1} = \sigma_{b1}/E_b\,.$$

5. Используя гипотезу плоских сечений, найдем максимальную растягивающую деформацию $\varepsilon_{p1}$и деформацию на уровне вершины трещины $\varepsilon_{m1}$от предварительного натяжения арматуры

$$\varepsilon_{p1} = \varepsilon_{c1}\left(h - x_1\right)/x_1, \qquad \varepsilon_{m1} = \varepsilon_{c1}\left(x_1 - l_{m2}\right)/x_1.$$

6. Так как эпюры деформации линейны, то суммированием найдем деформации на краю сжатой зоны и на уровне вершины трещины от изгиба при совместном действии предварительного напряжения и изгиба. С учетом знаков деформации

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{p1} - \varepsilon_{c2}, \qquad \varepsilon_m = \varepsilon_{m2} - \varepsilon_{m1}.$$

7. На основе гипотезы плоских сечений найдем положение нулевой линии при совместном действии нагрузок

$$\frac{\left|\varepsilon_c\right|}{x} = \frac{\varepsilon_m}{h - x - l_{m2}}.$$

Отсюда находим $x = \dfrac{\left(h - l_{m2}\right)\left|\varepsilon_c\right|}{\varepsilon_m + \left|\varepsilon_c\right|}$.

8. Так как у вершины трещины деформация должна быть равна $\varepsilon_{m2}$, то при изгибе предварительно напряженного элемента длина трещины уменьшится.Из гипотезы плоских сечений следует

$$\frac{\varepsilon_{m2}}{h - x - l_m} = \frac{\left|\varepsilon_c\right|}{x}.$$

Отсюда находим $l_m = h - \dfrac{\varepsilon_{m2} + \left|\varepsilon_c\right|}{\left|\varepsilon_c\right|}x$.

9. По диаграмме деформирования находим максимальное сжимающее напряжение в бетоне

$$\sigma_b = 1{,}1R_{bn}\left[1 - \exp\left(-0{,}9\varepsilon_c E_b / R_{bn}\right)\right].$$

10. По регрессионным зависимостям (2.33) и (2.69) определяем напряжение в арматуре от предварительного натяжения $\sigma_{s1}$ и от изгиба $\sigma_{s2}$.

11. Так как арматура деформируется упруго, то полное напряжение в ней определяется суммированием

$$\sigma_s = \sigma_{s1} + \sigma_{s2}.$$

Если при изгибе арматура работает за пределом упругости, то нужно суммировать деформации

$$\varepsilon_{s1}=\frac{\sigma_{s1}}{E_s},\quad \varepsilon_{s2}=\varepsilon_{m2}\frac{h-x-l_{m2}}{h-x-a},\quad \varepsilon_s=\varepsilon_{s1}+\varepsilon_{s2}.$$

Далее по диаграмме деформирования арматуры определяется суммарное напряжение в арматуре $\sigma_s$.

12. По формуле (2.61) определяем шаг трещин.

13. По формуле (2.60) или (2.62) определяем ширину раскрытия трещины.

Если при изгибе трещина не возникает, то нужно определять и складывать деформации на растянутом краю бетона, затем по ней по формуле (2.14) определять суммарное растягивающее напряжение в бетоне (см. п.9).

### 2.5 Численный расчет напряженного состояния сечения с трещиной при внецентренном сжатии

При численном расчете железобетонного элемента на внецентренное приложение силы на основе балочного элемента нагрузка приводится к двум параметрам: центрально приложенной силе $P$ и изгибающему моменту $M=Pe$, где $e$– эксцентриситет внешней силы относительно центра тяжести сечения. Чтобы проводить расчет сечения с трещиной нужно сначала определить область изменения этих параметров нагрузки, при которых разрушение не произойдет, но образуется трещина.

Рассмотрим сначала два предельных случая:

1) сила приложена центрально, то есть эксцентриситет (следовательно, момент) равен нулю;

2) действует только изгибающий момент, то есть эксцентриситет силы (следовательно, момент) очень большой и разрушение элемента происходит при малом значении силы и ее можно не учитывать.

В первом случае трещина не образуется, разрушение происходит за счет достижения напряжением в бетоне и арматуре расчетных значений. Определение напряжений сводится к решению обычной статически неопределимой задачи на сжатие:

$$N_a+N_b=-P,\qquad N_a/E_sA_s=N_b/E_bA_b.$$

Отсюда находим предельные силы в бетоне и арматуре

$$N_b=-\frac{P}{1+\alpha\mu},\qquad N_a=-\frac{\alpha\mu P}{1+\alpha\mu}.$$

Приравнивая напряжения расчетным значениям определяем разрушающие нагрузки для бетона и арматуры

$$P_{pb} = (1+\alpha\mu) R_b A_b, \quad P_{pa} = (1+1/\alpha\mu) R_s A_s.$$

Сравнивая эти силы, заключаем, что разрушение бетона происходит при меньших силах. Следовательно, предельная сжимающая сила равна

$$P_{pr} = (1+\alpha\mu) R_b A_b.$$

Во втором случае происходит чистый изгиб, и разрушающая нагрузка определяется из уравнения (2.41) и (2.43) в общем случае и по формулам (2.47) для прямоугольного сечения.

Указанные значения силы и момента дают максимально возможные значения параметров нагружения при внецентренном сжатии. В общем случае разрушение происходит при определенном сочетании силы и момента: каждому значению силы соответствует свой разрушающий момент $M_{pp}$. Это сочетание в общем случае определяется из уравнений равновесия (2.41) и (2.43). При внецентренном растяжении-сжатии уравнение моментов надо записывать относительно центра тяжести бетона

$$M = R_s A_s (h/2 - a) + R_b bx(h - x)/2.$$

При внецентренном сжатиив зависимости от значения силы при разрушении напряжение в арматуре может быть меньше расчетного сопротивления $R_s$. Поэтому в уравнениях равновесия $R_s$ надо заменить на $\sigma_s$. При $\xi_0 = x/h_0 \approx 1,1\xi \le \xi_R$ это напряжение будет равно $R_s$.

Область изменения параметров определим для прямоугольного сечения с одиночной арматурой, для которого и будут проводиться расчеты в дальнейшем.

Уравнения равновесия прямоугольного сечения перепишем в безразмерном виде:

$$\eta - \xi + S = 0, \qquad (2.74)$$

$$M_{pp} = R_s A_s h\left[(0,5 - a_0)\sigma_s/R_s + 0,5(1-\xi)\xi/\eta_R\right],$$

где $\eta = \mu\sigma_s/R_b$, $\eta_R = \mu R_s/R_b$, $S = P/R_b A_b$.

Область изменения параметров целесообразно строить в безразмерных координатах: по вертикальной оси будем откладывать безразмерную силу $S$, а

по горизонтали – безразмерный момент $m_p = M_{pp}/M_p$, где $M_p$ – разрушающий момент при чистом изгибе, то есть при $P=0$. Этот момент определяется из (2.47) и будет равен

$$M_p = R_s A_s h\left(h_0/h - 0,5\eta_R\right).$$

Конкретные расчеты будем вести для бетона В25 ($R_b = 14,5$ *МПа*) при $\mu = 0,015$ и $h_0/h = 0,91$. Тогда

$$\eta_R = 0,383, \quad M_p = 0,719\, R_s A_s h.$$

Теперь выражение для определения безразмерного момента примет вид:

$$m_p = 0,57\sigma_s/R_s - 1,816(1-\xi)\xi. \qquad (2.75)$$

В область изменения параметров нагрузки включим, только ту область, где в арматуре возникают растягивающие напряжения. По формуле (2.38) для бетона В25 определяем

$$\omega = 0,85 - 0,008\cdot 14,5 = 0,735, \quad \varepsilon_R = 0,735\Big/\left[1+\left(1-0,735/1,1\right)370/400\right] = 0,56.$$

Из формулы (2.45) следует, что $\sigma_s \geq 0$, если $\xi \leq \xi_0 = 0,5\left(1+\varepsilon_R\right) = 0,78$.

При этом значении $\xi_0$ из выражения (2.74) находим максимальное значение безразмерной силы, при которой еще возможно образование трещины

$$S = S_* = \xi = \xi_0/1,1 = 0,709.$$

Таким образом граница зоны разрушения определяется совместным решением уравнений (2.74) и (2.75). При $S=0$ $\xi=\eta_R$ и $m_p=1$. При $\xi \leq \xi_R/1,1 = 0,51$ напряжение в арматуре $\sigma_s = R_s$. При $\xi > 0,51$ из формулы (2.45) следует

$$\sigma_s = \left(3,545 - 5\xi\right)R_s.$$

Определим границу области образования трещины. Высоту сжатой зоны определяем из уравнения (2.34′), в котором безразмерную силу натяжения в арматуре $S$ заменяем на продольную силу

$$S_1 = P/R_{bt}bh = SR_b/R_{bt}.$$

Учитывая, что для бетона В25 $R_b = 14,5 МПа$, $R_{bt} = 1,6 МПа$, перепишем уравнение (2.34′) в виде

$$\xi^2 + 2(1,255 + 6,975)\xi - 1,255 - 13,955S = 0. \qquad \text{(а)}$$

Уравнение моментов остается прежним (2.35′), но силу предварительного натяжения $S$ надо положить равной нулю. Тогда

$$M_m = K_t b h^2 R_{bt},\ m_m = \frac{M_m}{m_m} = \frac{K_t b h^2 R_{bt}}{0,719 R_s A_s h} = \frac{K_t R_{bt}}{0,719 \eta_R R_b}, \qquad \text{(б)}$$

$$K_t = (1-\xi)(0,076 + 0,265\xi) + 0,222\xi^2(3 - 2\xi)/(1-\xi) + 0,109.$$

Для построения границы трещиностойкости, задавшись значением $S$, из уравнения (а) определяем $\xi$, затем по уравнению (б) определяем коэффициент $K_t$. Далее определяем безразмерный момент $m_m$. Граница области изменения параметров для бетона В25 при $\mu = 0,02$ показана на рисунке 2.6.

Граница зоны разрушения дается линией 1, граница зоны появления трещин показана линией 2. Область параметров, где нет разрушения, но появляется трещина при внецентренном сжатии железобетонного элемента ограничена кривыми 1, 2 и осью абсцисс.

Анализ области изменения параметров при внецентренном сжатии показывает, что в этом случае провести рационально планируемый многофакторный эксперимент не удастся. Если охватывать реальные параметры изменения нагрузки ($0 \le S \le 0,709$, $0,2 \le m \le 1$), то многие плановые сочетания нагрузок выходят за границы области трещинообразования. Если в плоскости параметров $S, m$ экспериментальная точка нагружения выйдет за зону разрушения, то программа не выдаст результата в связи с разрушением элемента. Если параметры нагружения окажутся левее линии 2, то длина трещины равна нулю и регрессионные зависимости, заложенные в программе ANETR, плохо будут описывать реальную модель.

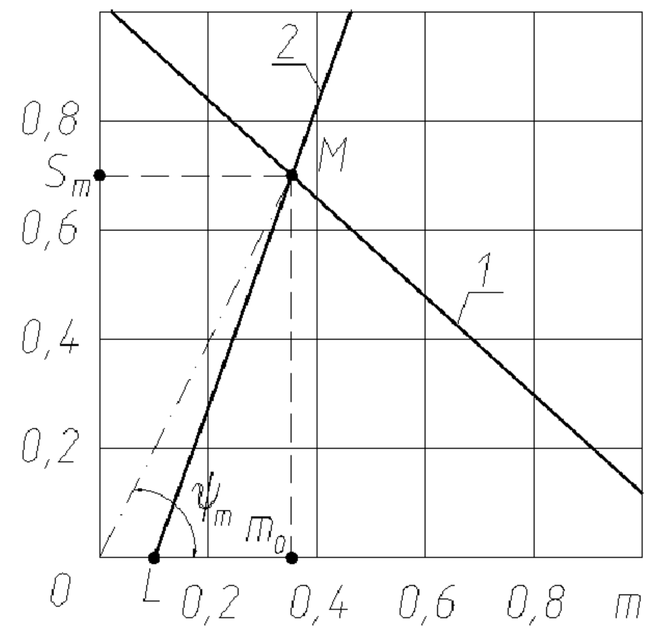



Рисунок 2.6 – Границы области трещинообразования при внецентренном сжатии бетона В25

Для анализа напряженного состояния железобетонного элемента с трещиной при внецентренном сжатии с помощью ПК ЛИРА был проведен расчет прямоугольного сечения размером $b=15$ *см*, $h=30$ *см* с коэффициентом армирования $\mu=0{,}014$. Армирование проводилось в растянутой зоне двумя стержнями диаметром по 20 *мм*. Материал: бетон класса В25, марки ТБ ($E_b=27000$ *МПа*); арматура класса А-III($R_s=370$ *МПа*, $E_s=2\cdot10^5$ *МПа*). При расчетах для бетона использован экспоненциальный закон деформирования 25, а для арматуры – кусочно-линейный закон 14.

Разрушающий момент для рассматриваемого сечения равна 51,1 *кНм*, максимальная сжимающая сила

$$P_{max} = 0,709 R_b bh = 462,7\ кН.$$

Безразмерные параметры нагружения представляют собой доли от этих максимальных нагрузок.

Результаты расчетов приведены в таблице 2.7. Расчеты приводились для фиксированных значений безразмерной силы: $S=0{,}1$; $S=0{,}3$; $S=0{,}5$. При каждом значении силы безразмерный момент менялся от 0,1 до разрушающего значения. Для каждого нагружения определялись: высота сжатой зоны $x$, максимальное сжимающее напряжение в бетоне $\sigma_b$, напряжение в арматуре $\sigma_s$, длина $l_m$и ширина раскрытия трещины $a_m$. Если при расчете трещина не появлялась, то определялось максимальное растягивающее напряжение в бетоне $\sigma_t$.

Таблица 2.7 – Параметры напряженного состояния сечения с трещиной при внецентренном сжатии

| m | X, см | $\sigma_b$, МПа | $l_m$, см / $\sigma_t$, МПа | $a_m$, мм | $\sigma_s$, МПа | S |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 0,1 | 15,9 | 2,3 | -/1,2 | - | 12,7 | |
| 0,2 | 14,1 | 5,2 | 3,09 | 0,01 | 40,7 | |
| 0,3 | 12,5 | 8 | 10,95 | 0,03 | 89,4 | |
| 0,4 | 12,4 | 10,2 | 12,91 | 0,04 | 126,4 | |
| 0,5 | 12,6 | 12 | 13,84 | 0,05 | 162,3 | 0,1 |
| 0,6 | 11,5 | 13,7 | 13,88 | 0,07 | 235,5 | |
| 0,7 | 13,1 | 15 | 14,52 | 0,07 | 240,6 | |
| 0,8 | 13,4 | 16,2 | 14,54 | 0,08 | 273,4 | |
| 0,9 | 13,9 | 17,1 | 14,43 | 0,10 | 312,9 | |
| 1,0 | 12,9 | 17,9 | 16,88 | 0,12 | 375,3 | |

Продолжение талицы 2.7

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,1 | 17,5 | 2,5 | -/1,1 | - | 10,8 | |
| 0,2 | 16,7 | 5,1 | - /1,5 | - | 27,1 | |
| 0,225 | 16,1 | 5,9 | 1,56 | 0,01 | 36,0 | |
| 0,25 | 15 | 6,9 | 5,45 | 0,02 | 50,9 | |
| 0,3 | 14,5 | 8,3 | 8,29 | 0,02 | 70,3 | |
| 0,4 | 14,3 | 10,7 | 10,69 | 0,03 | 102,8 | |
| 0,5 | 14,4 | 12,7 | 11,7 | 0,04 | 134,3 | 0,3 |
| 0,6 | 14,7 | 14,4 | 12,3 | 0,05 | 166,5 | |
| 0,7 | 15,0 | 15,8 | 12,53 | 0,06 | 199,9 | |
| 0,8 | 15,5 | 16,9 | 12,54 | 0,07 | 235,2 | |
| 0,9 | 16,0 | 17,8 | 12,38 | 0,08 | 273,1 | |
| 0,91 | 16,0 | 17,9 | 12,36 | 0,09 | 277,2 | |
| 0,915 | | | | | | |
| 0,1 | 19 | 2,7 | - /1,1 | - | 9,2 | |
| 0,2 | 18,4 | 5,4 | - /1,5 | - | 22,3 | |
| 0,25 | 18,1 | 6,8 | - /1,6 | - | 30,2 | |
| 0,255 | 17,7 | 7,0 | 1,16 | 0,01 | 33,7 | |
| 0,3 | 16,6 | 8,6 | 5,32 | 0,02 | 52,2 | |
| 0,4 | 16,2 | 11,1 | 8,42 | 0,03 | 81,8 | |
| 0,5 | 16,3 | 13,2 | 9,72 | 0,03 | 109,5 | 0,5 |
| 0,6 | 16,6 | 15 | 10,36 | 0,04 | 138,5 | |
| 0,7 | 16,9 | 16,5 | 10,66 | 0,05 | 169,6 | |
| 0,8 | 15,7 | 17,6 | 12,62 | 0,08 | 268 | |
| 0,825 | 15,8 | 17,8 | 12,59 | 0,09 | 281,4 | |
| 0,83 | 17,6 | 17,8 | 10,65 | 0,07 | 215,8 | |
| 0,835 | | | | | | |

Из таблицы видно, что с ростом силы значение разрушающего момента уменьшается. При малых значениях силы разрушение элемента происходит за счет достижения напряжением в арматуре и сжимающим напряжением в бетоне расчетных сопротивлений. С ростом сжимающей силы разрушение элемента происходит из-за разрушения бетона от сжимающих напряжений, а напряжение в арматуре остается меньшей расчетного сопротивления.

С ростом сжимающей силы значение момента по образованию трещины растет, то есть трещиностойкость элемента возрастает. Это объясняется ростом высоты сжатой зоны бетона. Качественная картина расположения зон

разрушения и трещинообразования совпадает с тем, что предсказывают теоретические расчеты (рисунок 2.6).

С ростом параметров нагружения параметры напряженного состояния в сечении с трещиной растут. Однако в зоне разрушения за счет высоких сжимающих напряжений в бетоне длина трещины и напряжение в арматуре снижаются.

## 2.6 Выводы по II главе

Приведем сначала сравнение некоторых результатов, полученных нами аналитическим и численным методами, с имеющимся экспериментальным результатом. Разрешающее уравнение (2.59) дает связь между безразмерными параметрами высоты сжатой зоны и длины трещины z. График экспериментальной зависимости между этими параметрами приведен в работе [126] (рисунок 8.11). Для сравнения нами построен этот график по уравнению (2.59) при $\alpha\mu = 0.038$, $\psi_b/\psi_s = 1.2$, $\bar{h} = 0.907$. На рисунке 2.7 он приведен сплошной линией.

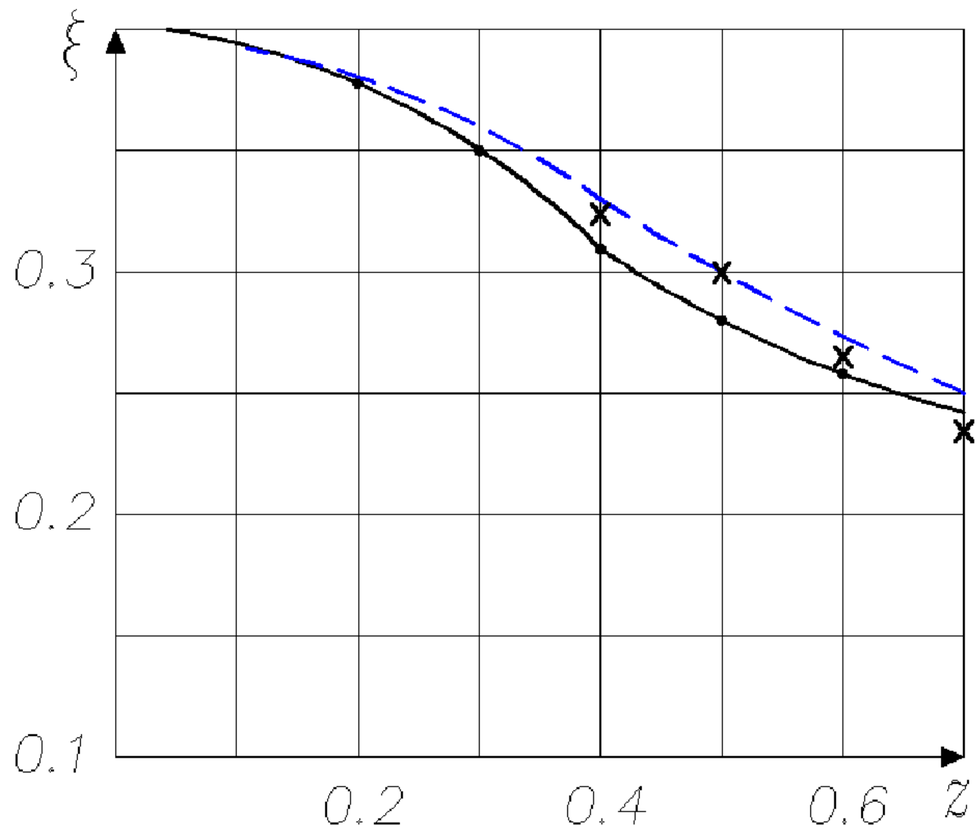



Рисунок 2.7. График зависимости высоты сжатой зоны от длины трещины

Там же штрих пунктирной линией показана эта зависимость, полученная с помощью программы ЛИРА. Кроме этого на график нанесены крестиком экспериментальные точки из вышеупомянутого графика (остальные точки отсутствуют). Максимальное отклонение наших результатов от численного эксперимента составляет 9.1%, а от натурного эксперимента 9.2%. Такое расхождение результатов можно считать удовлетворительным.

По результатам работы можно сделать следующие выводы.

1. Разработана методика нелинейного аналитического расчета напряженного состояния железобетонных элементов при предварительном натяжении арматуры.

2. Определено предельное значение предварительного натяжения арматуры, при котором появляется трещина на стадии изготовления.

3. Рационально спланирован и с использованием ПК ЛИРА проведены многофакторные компьютерные эксперименты по определению предварительных напряжений в железобетонных элементах прямоугольного сечения.

4. Путем обработки результатов экспериментов по программе нетрадиционного регрессионного анализа ANETR получены аналитические выражения для определения предварительных напряжений в железобетонных элементах прямоугольного сечения из бетона классов В25 и В40.

5. Предложена новая методика определения момента по образованию трещины.

6. Разработан новый аналитический метод расчета изгибаемых железобетонных балок с трещиной, позволяющий определить все параметры напряженного состояния, в том числе и длину трещины.

7. На базе рационального планирования и с использованием ПК ЛИРА проведены многофакторные компьютерные эксперименты по определению напряженного состояния изгибаемых железобетонных балок прямоугольного сечения с трещиной.

8. Путем обработки результатов экспериментов по программе ANETR получены регрессионные зависимости для параметров напряженного состояния изгибаемых железобетонных балок прямоугольного сечения, в том числе для длины и ширины раскрытия трещины.

9. Предложена методика учета предварительных напряжений при оценке технического состояния эксплуатируемой железобетонной конструкций, которую рекомендуется применять при раздельном определении предварительных и эксплуатационных напряжений.

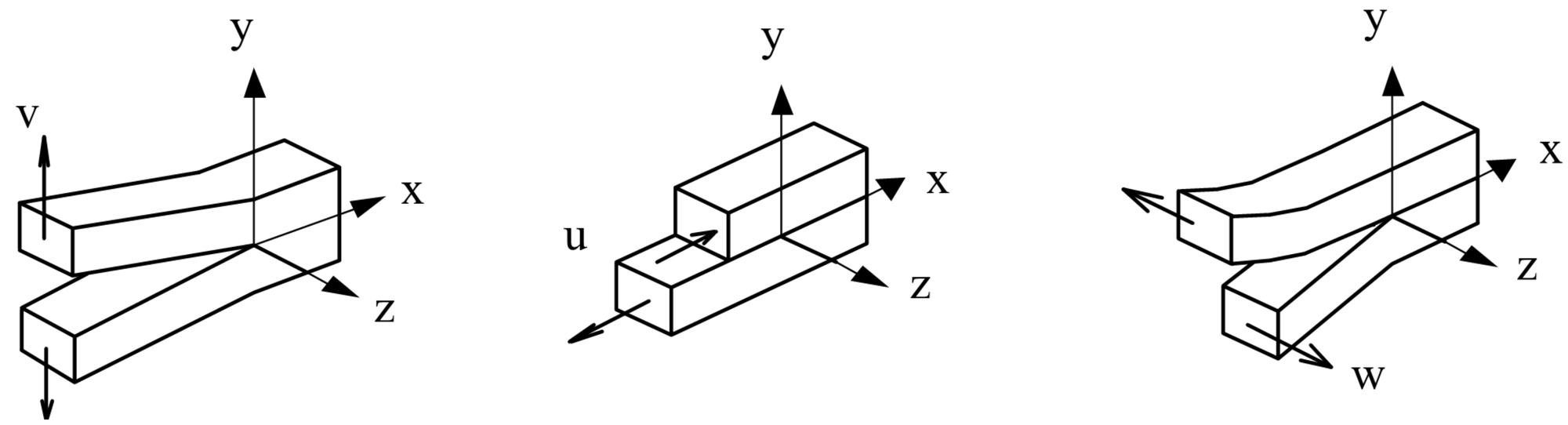
10. Применением ПК ЛИРА проанализировано напряженное состояние изгибаемых железобетонных балок прямоугольного сечения при внецентренном нагружений.

# 3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ В ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИЙ С ТРЕЩИНАМИ

## 3.1 Применение МКЭ в механике разрушения

Коэффициент интенсивности напряжений (КИН) является одним из наиболее важных параметров в линейной механике разрушения. Понятие КИН было впервые введено Д.Р. Ирвиным [22]. К настоящему времени накоплен большой материал по изучению данного параметра [12, 25]. Специфика решений задач линейной теории упругости для тел с трещинами - наличие особых точек. Если привести классификацию полей напряжений в этих точках, то их можно разделить на три основные вида, которые соответствуют трем типам деформирования (рисунок 3.1).

Ирвин, руководствуясь методом Вестергарда [22] для приведенных типов деформаций (рис. 3.1) при растрескивании получил соответствующие выражения в явном виде для полей напряжений и деформаций. Типы I и IIмогут рассматриваться как плоские задачи теории упругости. Деформирования по типу III можно отнести к антиплоской задаче чистого сдвига и кручения.




а) б) в)

а)тип I (отрыв); б) тип II (поперечный сдвиг); в) тип III (продольный сдвиг)

Рисунок 3.1 – Три основных типа деформации при растрескивании

Напряжения и перемещения у вершин указанных типов трещин выражаются следующими зависимостями [12, 20].

1. Трещина нормального отрыва (рисунок 3.1,а):

$$\{\sigma\} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \{p\}, \qquad (3.1)$$

где вектор $\{\sigma\}^T = \{\sigma_x \; \sigma_y \; \tau_{xy}\}$, а элементы вектора $\{p\}$ зависят от полярных координат $r$ и $\theta$, начало которых помещается в вершине трещины,

$$p_1 = \mathrm{Cos}\frac{\theta}{2}\cdot\left(1-\mathrm{Sin}\frac{\theta}{2}\mathrm{Sin}\frac{3\theta}{2}\right),\quad p_2 = \mathrm{Cos}\frac{\theta}{2}\cdot\left(1+\mathrm{Sin}\frac{\theta}{2}\mathrm{Sin}\frac{3\theta}{2}\right),$$

$$p_3 = \mathrm{Sin}\frac{\theta}{2}\mathrm{Cos}\frac{\theta}{2}\mathrm{Cos}\frac{3\theta}{2}.$$

Перемещения

$$\{u\} = \frac{K_I}{2G}\cdot\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cdot\{s\}, \qquad (3.2)$$

где вектор $\{u\}^T = \{u, v\}$, а элементы вектора $\{s\}$ определяются выражениями

$$s_1 = \mathrm{Cos}\theta/2\left(\chi - 1 + 2\mathrm{Sin}^2\theta/2\right),\quad s_2 = \mathrm{Sin}\theta/2\left(\chi + 1 - 2\mathrm{Cos}^2\theta/2\right).$$

Здесь $\chi = 3-4\nu$ для плоской деформации и $\chi = (3-\nu)/(1+\nu)$ для плоского напряженного состояния, $G$ - модуль сдвига, а $K_I$ - коэффициент интенсивности напряжений для трещины нормального отрыва.

Далее приведем формулы для определения напряжений и перемещений для трещин поперечного и продольного сдвига, взятые из работы [209]. Они нужны будут нам для определения КИН ($K_{II}$, $K_{III}$) МКЭ.

2. Трещина поперечного сдвига (рисунок 3.1, б)

$$\{\sigma\} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi\cdot r}}\cdot\{p\}, \qquad (3.3)$$

где $K_{II}$ - КИН для трещин поперечного сдвига, а элементы $\{p\}$ оцениваются в виде

$$p_1 = -\mathrm{Sin}\frac{\theta}{2}\cdot\left(2+\mathrm{Cos}\frac{\theta}{2}\mathrm{Cos}\frac{3\theta}{2}\right),\quad p_3 = \mathrm{Cos}\frac{\theta}{2}\cdot\left(1-\mathrm{Sin}\frac{\theta}{2}\mathrm{Sin}\frac{3\theta}{2}\right),$$

$$p_2 = \mathrm{Sin}\frac{\theta}{2}\mathrm{Cos}\frac{\theta}{2}\mathrm{Cos}\frac{3\theta}{2}.$$

Величина $\sigma_z = \nu\cdot(\sigma_x+\sigma_y) = -\frac{2K_{II}\nu}{\sqrt{2\pi\cdot r}}\mathrm{Sin}\theta/2$.

Перемещения

$$\{u\} = \sqrt{\frac{r}{2\pi}}\frac{K_{II}}{2G}\cdot\{s\}, \qquad (3.4)$$

где $s_1 = \mathrm{Sin}\theta/2\left(2-2\nu+\mathrm{Cos}^2\theta/2\right)$, $s_2 = \mathrm{Cos}\theta/2\left(-1+2\nu+\mathrm{Sin}^2\theta/2\right)$.

3. Трещина продольного сдвига (рисунок 3.1, в)

$$\{\tau\} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \{p\}, \tag{3.5}$$

где $\{\tau\}^T = \{\tau_{xz}\ \tau_{yz}\}$, а элементы {p}

$$p_1 = -\mathrm{Sin}\theta/2,\ p_2 = \mathrm{Cos}\theta/2.$$

Перемещения u=v=0, а w оценивается как

$$w = \frac{K_{III}}{2G} \cdot \sqrt{\frac{2r}{\pi}}\mathrm{Sin}\theta/2, \tag{3.6}$$

где $K_{III}$ - КИН для трещин продольного сдвига.

Отсюда видно, что с точки зрения физического смысла, КИН можно рассматривать как параметр, который отражает перераспределение напряжений в теле при наличии трещины.

Применительно к характерным случаям нагружения величины $K_I, K_{II}$ и $K_{III}$ использовались во многих работах [9, 11, 20, 97]. В данной работе в качестве основного метода определения параметров механики разрушения применяется МКЭ. Так как на практике в основном характерны I и II типы деформаций при растрескивании рассматриваются плоские задачи линейной и нелинейной механики разрушения.

Форма конечного элемента должна как можно точнее описывать контуры объекта. С этой целью применяют изопараметрические элементы. Перемещения в элементах описываются линейными или квадратичными функциями. Сравнение решений тестовых задач позволило сделать вывод о том, что с точки зрения точности и времени вычислений наиболее эффективным является изопараметрический восьмиузловой четырехугольный элемент [6] (рис.3.2).

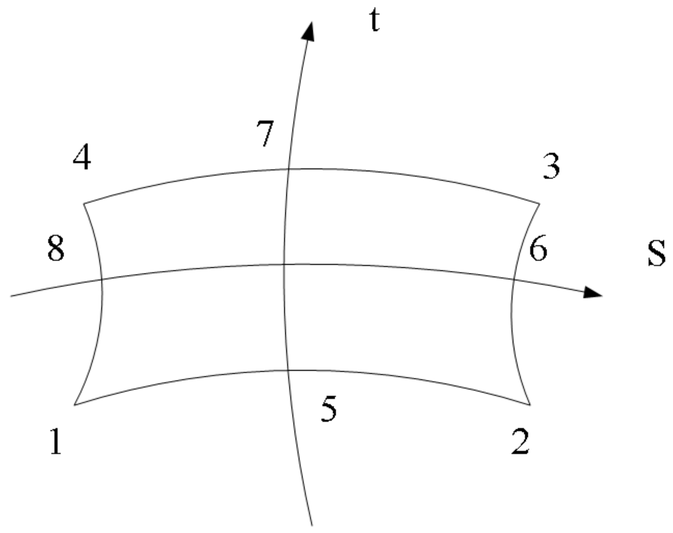



Рисунок 3.2 – Изопараметрический восьмиузловой четырехугольный элемент

Из теоретических решений типа (3.1) и (3.2) видно, что перемещения у вершины трещины пропорциональны $r^{1/2}$, а напряжения имеют особенность вида $r^{-1/2}$.

Для более точного определения КИН с помощью МКЭ надо учесть эти особенности. Обычные конечные элементы описывают поля перемещений с помощью полинома с целыми степенями. Поэтому приходится прибегать к сильному уменьшению размеров конечных элементов у вершины трещины.

Для преодоления этого затруднения многие авторы применяли сильное сгущение сетки элементов у вершины трещины. Такой прием приводит к необходимости решения громоздких систем линейных уравнений, что значительно увеличивает время счета, а зачастую и количество исходных данных, если не иметь в своем распоряжении подходящей программы автоматического построения сетки.

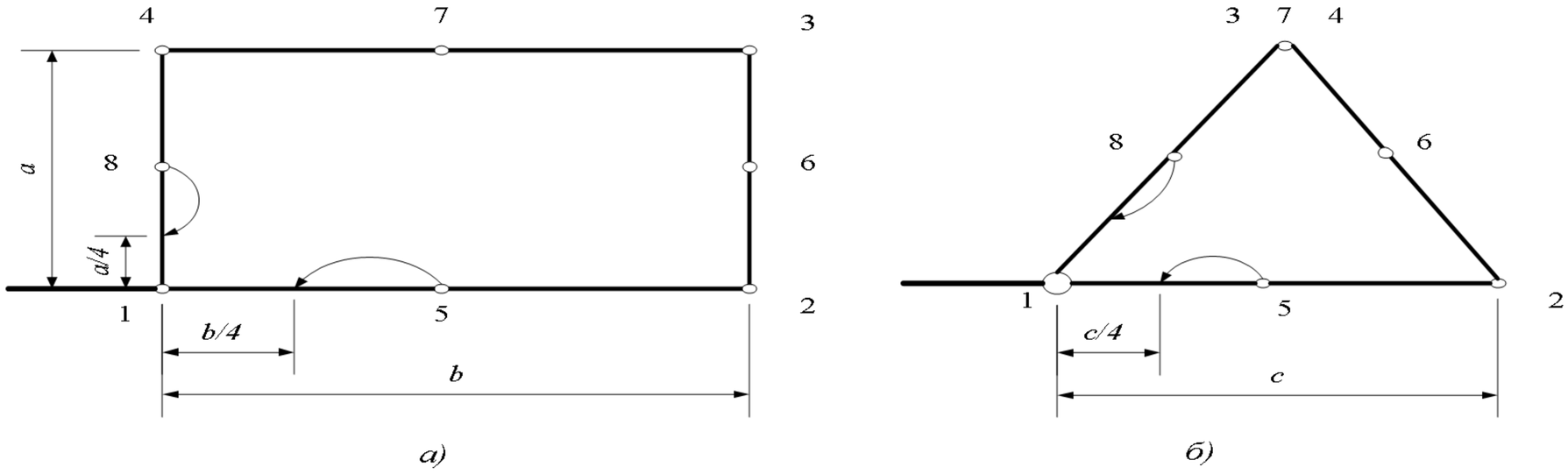
Избежать этих громоздких вычислений позволяет введение в сетку одного или нескольких специальных элементов, моделирующих сингулярность напряжений. Особенность этих элементов заключается в том, что в них функций перемещений должны содержать член, пропорциональный $\sqrt{r}$. По результатам исследовании предложено много различных видов конечных элементов. Но все они имеют два недостатка: несовместность с обычными элементами, а иногда неспособность отображать перемещение тела как целого.

В работе [22] было показано, что если промежуточный узел изопараметрического квадратичного элемента поместить, сдвинув его на четверть длины стороны по направлению к вершине трещины, то распределение перемещений вдоль этой стороны дается выражением

$$U_i = C_1 + C_2\sqrt{r} + C_3 r ,$$

где $r$ – координата, отсчитываемая от вершины трещины, $C_1, C_2, C_3$ - независимые константы.

Эта функция хорошо учитывает особенность поля перемещений в вершине трещины. Для учета особенности поля напряжений в вершине трещины необходимо сдвинуть промежуточные узлы на сторонах, примыкающих к вершине на четверть длины ребра в сторону трещины (рис.3.3, а). Применение этих элементов показало, что в этом случае ухудшается сходимость решения. Поэтому для улучшения сходимости предложено трансформировать четырехугольный элемент в треугольный элемент [6, 13] (рис. 3.3, б).




*а*) квадратичный четырехугольный элемент, *б*) квадратичный вырожденный элемент

Рисунок 3.3 – Моделирование сингулярности напряжений в вершине трещины

Сконструированные таким образом сингулярные элементы обладают следующими положительными свойствами: они полностью совместны с обычными квадратичными элементами, отражают смещение тела как целого, для них остаются справедливыми теоремы о сходимости решений к точному для обычных элементов, для вычисления матриц жесткости сингулярных элементов не требуется каких – либо специальных подпрограмм.

### 3.2 Численный расчет параметров механики разрушения

В настоящее время известны различные методы расчета КИН, основанные на МКЭ. Рассмотрим наиболее распространенные из них.

**1. Прямые методы**. Здесь для определения КИН в формулы (3.1) - (3.6) подставляются значения напряжений или перемещений у вершины трещины, найденные МКЭ.

Применение прямого метода предполагает высокую точность определения напряжений и перемещений у вершины трещины. Для этого нужно уменьшать размеры конечного элемента у вершины трещины и применять экстраполяцию найденных значений КИН при стремлении расстояния от вершины трещины к нулю. Поэтому при определении КИН необходимо предусмотреть меры, позволяющие улучшить точность решения. Простейший и эффективный способ преодоления этого затруднения - сильное сгущение сетки у вершины трещины, в сочетании с экстраполяцией рассчитанных значений величины КИН на различных расстояниях r от вершины трещины при $r \to 0$.

Если ввести предположение, что контуры трещины в ее вершине описываются уравнением эллипса, то величину $K_I$ можно определить по перемещениям $v$ в направлении оси y по следующей формуле:

$$K_I = 2G\sqrt{2\pi} \cdot v \Big/ \left[ (\chi + 1)\sqrt{r \cdot (1 - r/2l)} \right], \qquad (3.7)$$

где l - длина краевой или полудлина внутренней трещины.

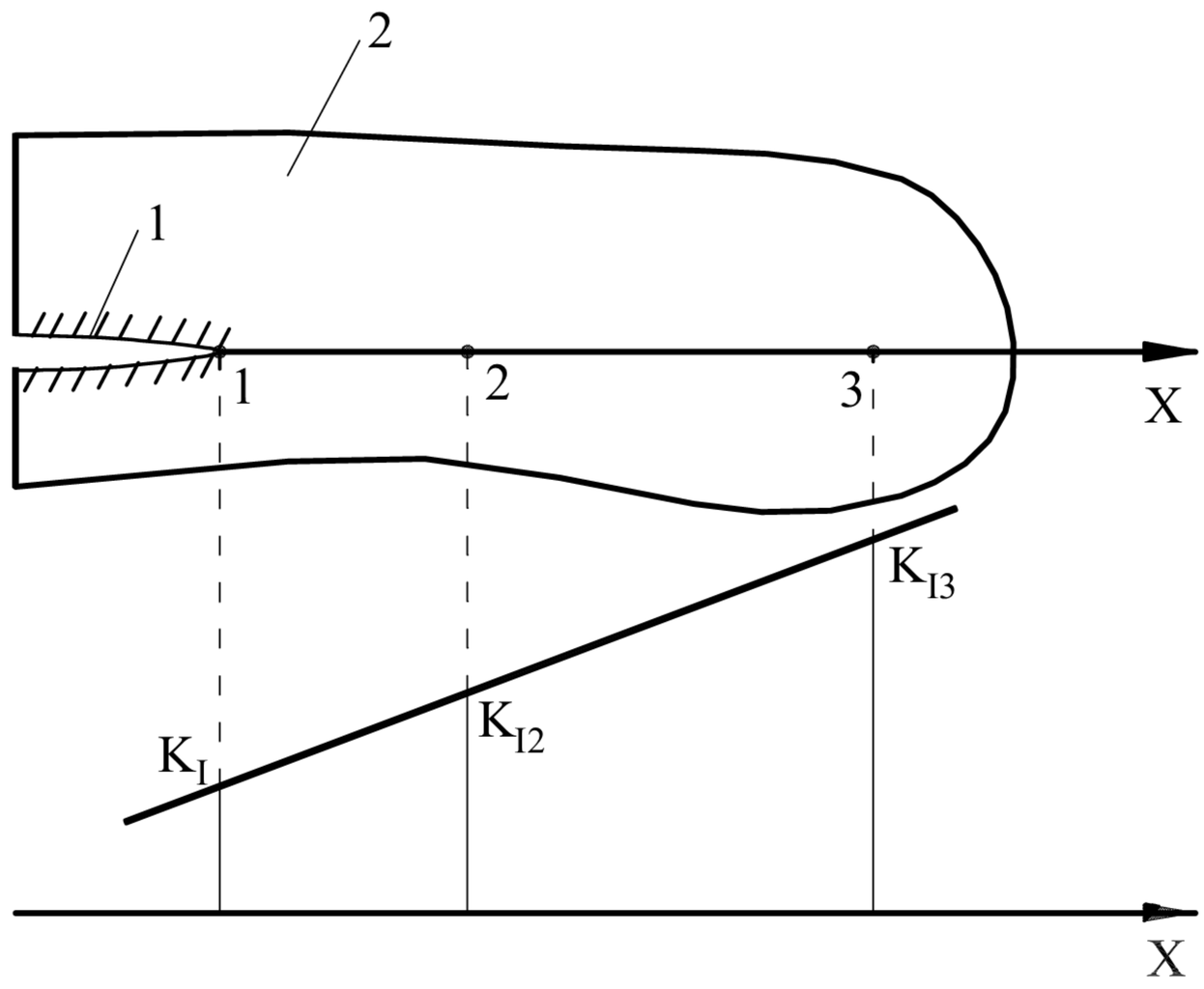
При выводе формулы (3.7) принято $\theta = \pi$ .

Если определен КИН в точках 2 и 3 ($К_{12}$, $К_{13}$, рис. 3.4), то по линейной экстраполяции значение КИН в вершине трещины можно определить по формуле:

$$K_I = \frac{(1-b)x_1 - x_2 + bx_3}{x_3 - x_2} K_{I3}, \qquad (3.8)$$

где $b = K_{I2}/K_{I3}$ ; $x_1, x_2, x_3$ - координаты точек, в которых вычисляется КИН.

При прямом методе точность результатов сильно зависит от размеров конечных элементов у вершины трещины. Исследованиями установлено, что для элементов второго порядка, которые будут использованы далее, этот размер рекомендуется брать равным 1/50 длины трещины.




1 - трещина; 2 – деформируемое тело

Рисунок 3.4 – Схема вычисления параметра $К_I$

**2. Энергетический метод.** В этом методе определения КИН используют зависимость интенсивности освобождения энергии G с производной потенциальной энергии П по длине трещины l

$$G = -\frac{\partial \Pi}{\partial l}. \qquad (3.9)$$

Здесь интенсивность освобождения энергии оценивается зависимостью

$$G = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}}{E'(1-\nu)}, \qquad (3.10)$$

где $\mathsf{E}' = \mathsf{E}$ при плоском напряженном состоянии и $\mathsf{E}' = \mathsf{E}/(1-\nu^2)$ в условиях плоской деформации.

Из зависимости (3.10) видно, что расчет КИН для трех типов трещин возможен только порознь.

Потенциальную энергию для одного конечного элемента можно представить в виде

$$\Pi^e = \{\delta\}^{e\mathsf{T}}[\mathsf{K}]^e\{\delta\}^e/2 - \{\delta\}^{e\mathsf{T}}\{\mathsf{R}\}^e. \qquad (3.11)$$

С учетом уравнений равновесия формула (3.11) принимает следующий вид:

$$\Pi^e = -1/2\{\delta\}^{e\mathsf{T}}\{\mathsf{R}\}^e. \qquad (3.12)$$

Полную потенциальную энергию можно получить путем объединения конечных элементов в систему. Продифференцировав выражение (3.12) по длине трещины, используя формулы (3.9) и (3.10) для трещины отрыва получим

$$\frac{\mathsf{K}_\mathsf{I}^2}{\mathsf{E}'} = \frac{1}{2}\sum_{e=1}^{\mathsf{N}}\left(\left\{\frac{\partial\delta}{\partial\mathsf{l}}\right\}^{e\mathsf{T}}\{\mathsf{R}\}^e + \{\delta\}^{e\mathsf{T}}\left\{\frac{\partial\mathsf{R}}{\partial\mathsf{l}}\right\}^e\right). \qquad (3.13)$$

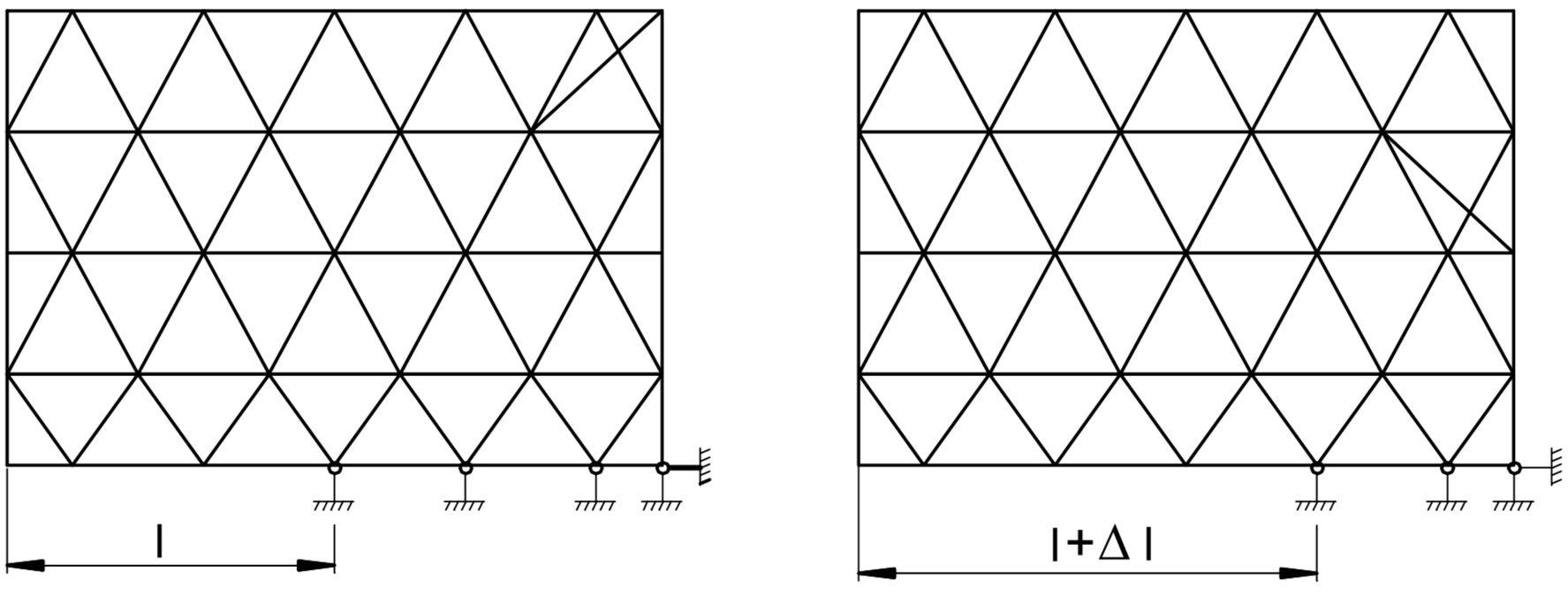
Принято считать, что рост длины трещины не влияет на силы. Тогда

$$\left\{\frac{\partial\,\mathsf{R}}{\partial\,\mathsf{l}}\right\}^e = 0. \qquad (3.14)$$

Отсюда получаем формулу составляющую основу метода податливости

$$\frac{\mathsf{K}_\mathsf{I}^2}{\mathsf{E}'} = \frac{1}{2\Delta\mathsf{l}}\sum_{e=1}^{\mathsf{N}}\left(\{\delta\}_{\mathsf{l}+\Delta\mathsf{l}}^e - \{\delta\}_\mathsf{l}^e\right)^\mathsf{T}\{\mathsf{R}\}^e. \qquad (3.15)$$

Этот метод применяют тогда, когда надо исследовать КИН в большом диапазоне длин трещин. В таких случаях отсутствие необходимости изменять сетку конечных элементов (рис. 3.5), которой нельзя избежать при использовании прямых методов, существенно облегчает решение задачи.




а) б)

а) – исходная трещина; б) – трещина увеличенной длины

Рисунок 3.5 – Схема изменения длины трещины

Дифференцирование соотношения (3.11) дает формулу

$$\frac{K_I^2}{E'} = -\frac{1}{2}\sum_{e=1}^{N}\{\delta\}^{eT}\left[\frac{\partial K}{\partial l}\right]^{e}\{\delta\}^{e} + \sum_{e=1}^{N}\{\delta\}^{eT}\left\{\frac{\partial R}{\partial l}\right\}^{e}, \qquad (3.16)$$

которая лежит в основе метода виртуального роста трещины. Если можно считать, что нагрузка не является функцией длины трещины, то выражение (3.16) упрощается

$$\frac{K_I^2}{E'} = -\frac{1}{2}\sum_{e=1}^{N}\{\delta\}^{eT}\left[\frac{\partial K}{\partial l}\right]^{e}\{\delta\}^{e}, \qquad (3.17)$$

Для отыскания производных узел, находящийся в вершине трещины, смещают на малую величину $\Delta l$ вдоль линии трещины (рис. 3.6). При этом изменится геометрия элементов, окружающих вершину, и производные матрицы [K] могут быть рассчитаны по приближенной формуле

$$\frac{K_I^2}{E'} = \frac{[\Delta K]^e}{\Delta l} = \frac{[K]^e_{l+\Delta l} - [K]^e_l}{\Delta l}. \qquad (3.18)$$

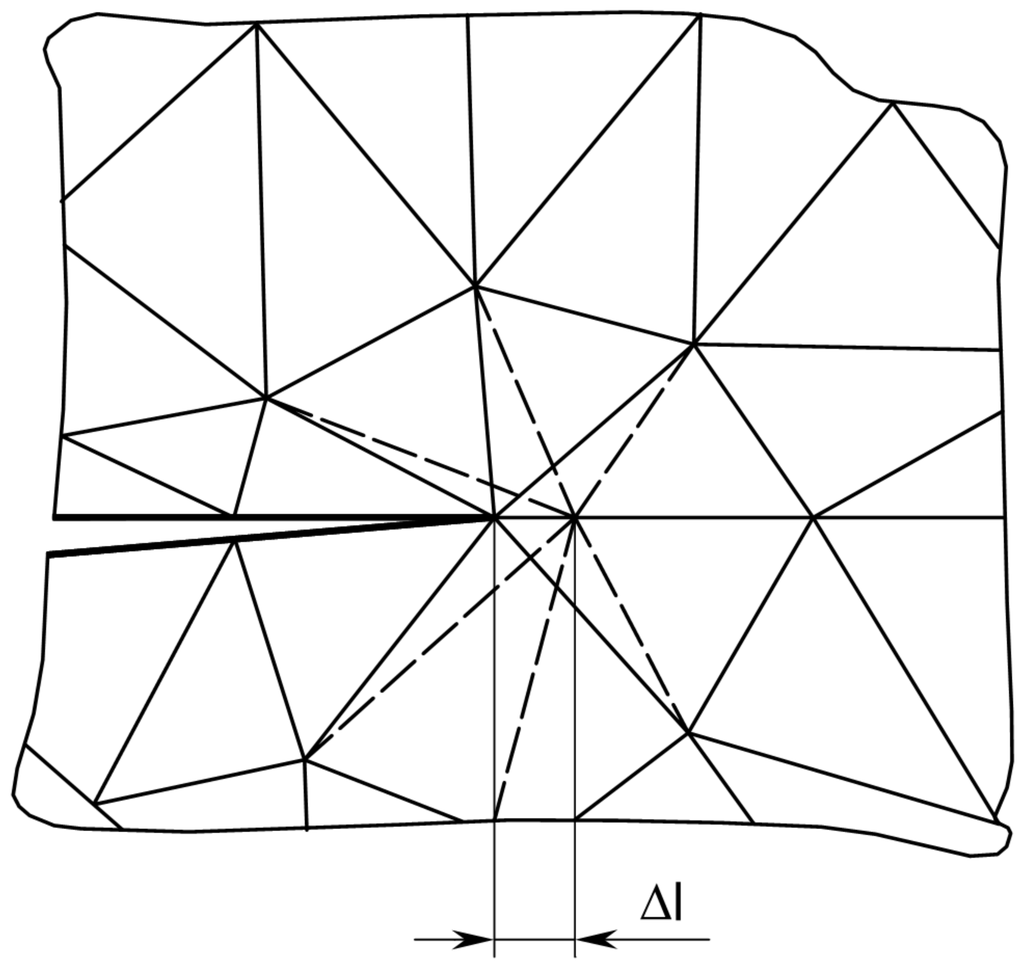



Рисунок 3.6 – Сдвиг узла в вершине трещины

4. **Метод J -интеграла.** J -интеграл равен интенсивности освобождения энергии и характеризует условие разрушения в линейной и нелинейной механике и определяется так:

$$J = \int_{\Gamma} \left( W dy - \{T\} \frac{\partial \{u\}}{\partial x} ds \right), \qquad (3.19)$$

где $\Gamma$ - контур, вокруг вершины трещины;

$\{T\}$ - вектор поверхностных сил: $T_i = \sigma_{ij} n_j$ ;

$n_j$ - нормаль к контуру (рис. 3.7);

W - плотность энергии деформации.

Обход контура интегрирования Г проводится против часовой стрелки.

Если учесть связь между параметрами механики разрушения ($J = G$), то для определения КИН получаем следующее выражение:

$$\frac{K_I^2}{E'} = \int_{\Gamma} \left( W dy - \{T\} \frac{\partial \{u\}}{\partial x} ds \right).$$

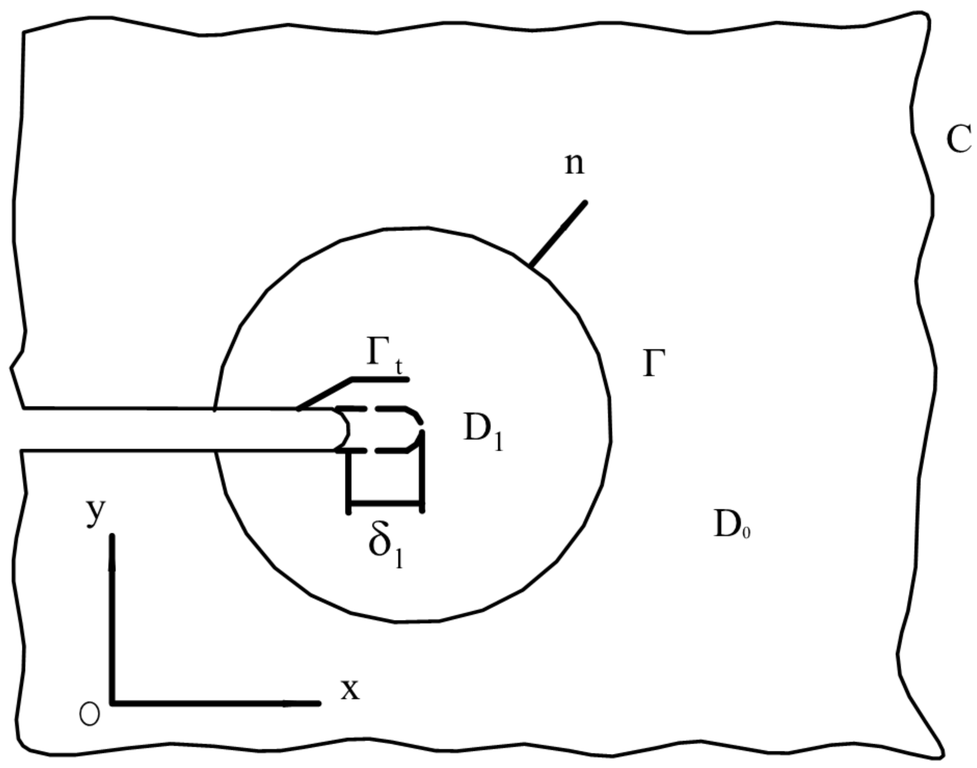



Рисунок 3.7 – Контур интегрирования, охватывающий вершину трещины

***Метод определения J-интеграла***

Анализ работ в механике разрушения [6, 22, 23, 25, 61-63, 65] показывает, что наиболее общий и точный критериальный параметр механики разрушения - инвариантный Г-интеграл, предложенный Черепановым Г.П.В зарубежной литературе используется не зависящий от пути Т-интеграл, который по существу идентичен Г-интегралу.Он пригоден для общего нестационарного распространения трещины в условиях динамики, существенных пластических, вязких и других деформациях, любой истории нагружения, температуры.

В реальной практике проектирования и прогнозирования разрушения важно оценить момент страгивания стационарной трещины в упругопластическом теле, нагруженном произвольной системой внешних сил. Введем следующие ограничения [25]:

1) постоянства температуры; 2) однородности материала (по меньшей мере в направлении оси нагруженияx$_1$); 3) монотонности и пропорциональности нагружения; 4) отсутствия разгрузки; 5) отсутствия массовых сил и сил инерции. При выполнении этих условий для стационарной трещины получаем $J = J$, где J - независящий от пути интеграл Черепанова-Эшелби-Райса [22, 25], являющийся количественной характеристикой упругопластического состояния материала в окрестности вершины трещины

$$J = \int_{\Gamma} (W n_k - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} n_j) dc, \qquad (3.20)$$

где Г - произвольный контур интегрирования (рис. 3.7);

$$W(\varepsilon_{ij}) = \int_0^{\varepsilon} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}\ ; \qquad (3.21)$$

$\varepsilon_{ij}$ - полные деформации.

Значение энергетического $J$-интеграла достаточно для конструирования критерия разрушения и оно может являться конечной целью расчета. В задачах ЛМР в ряде случаев удобно оперировать значениями коэффициентов интенсивности напряжений $K_I$, $K_{II}$, $K_{III}$. Согласно [15] эта связь имеет вид:

$$J = \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \left( K_I^2 + K_{II}^2 \right) + \frac{\nu+1}{E} \cdot K_{III}^2 , \qquad (3.22)$$

где индексы I, II и III соответствуют типам деформирования (рис. 3.1).

Впервые МКЭ в упругопластической механике разрушения применили для изучения НДС в окрестности вершины острой трещины. С помощью линейных элементов были определены контуры пластической зоны для локализованного пластического течения у вершины трещины. Рациональное разбиение этой зоны на конечные элементы позволяет правильно моделировать асимптотику решения у вершины острой трещины, как в упругом теле, так и в теле из упругопластического материала.

### 3.3 Определение параметров механики разрушения в элементах металлоконструкций

Реализацию вышеуказанной методики расчета параметров механики разрушения изложим на методических примерах, имеющих большое практическое применение. Пусть прямоугольная пластина имеет центральную или краевую трещину, и растянута напряжением σ, как показано на рисунке 3.8. Существуют точные решения таких задач только для пластин бесконечных размеров. Эти задачи для пластин конечных размеров решались разными авторами численными методами. Мы решаем эти задачи для отработки методики расчета, оценки точности и выбора некоторых параметров конечно-элементной модели.

Задача решалась применением изопараметрического четырехугольного элемента второго порядка Plane 82. В ПК ANSYS трансформация четырехугольных элементов в треугольные и сдвиг промежуточных точек выполняется автоматически.

Разбиение на конечные элементы также выполняется автоматически заданием размеров конечных элементов у вершины трещины и на контуре пластины. Сетка конечных элементов имеет сгущение у вершины трещины и показана на рисунке 3.9.

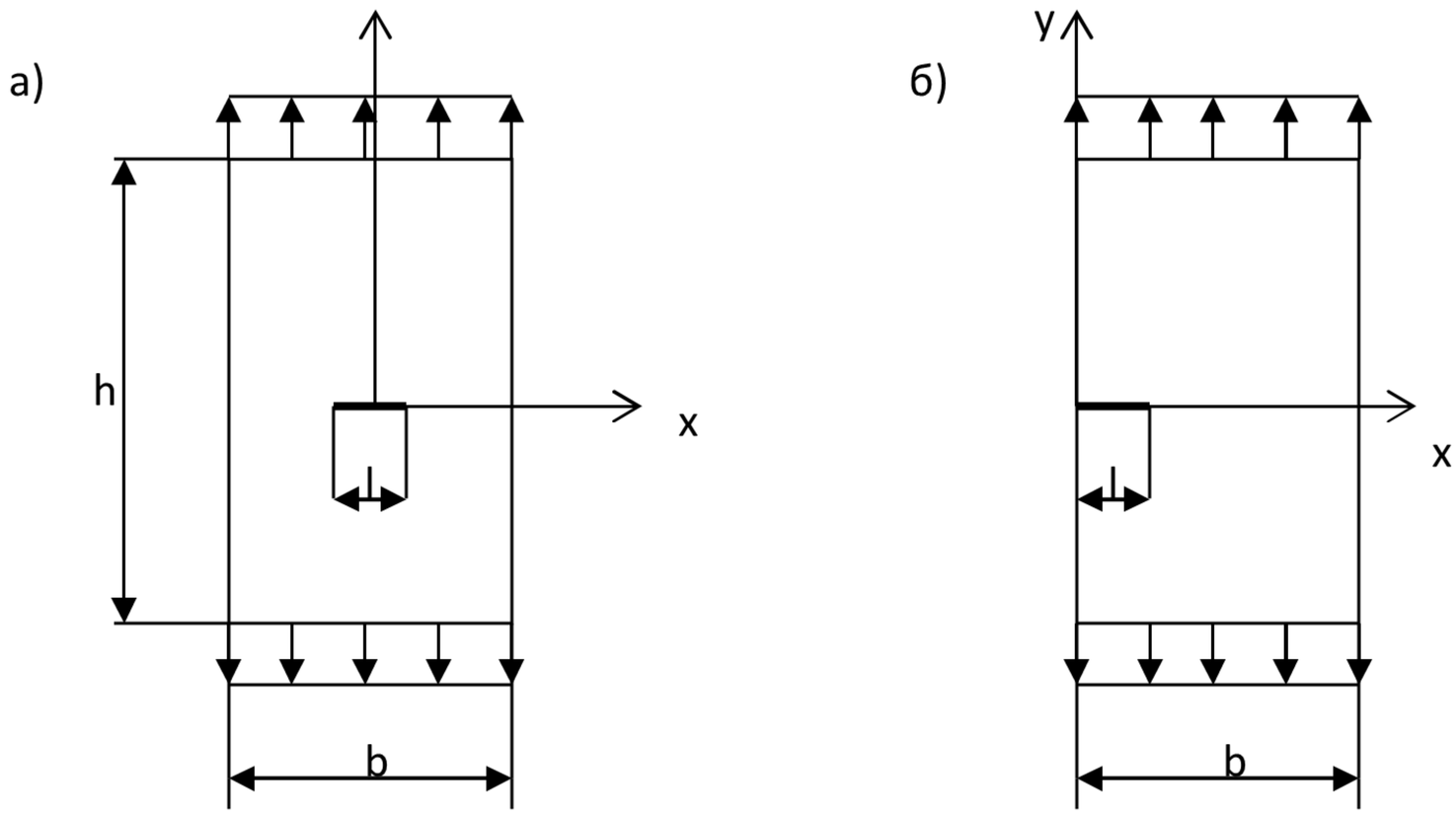



Рисунок 3.8 – Пластина с центральной (а) и краевой (б) трещиной

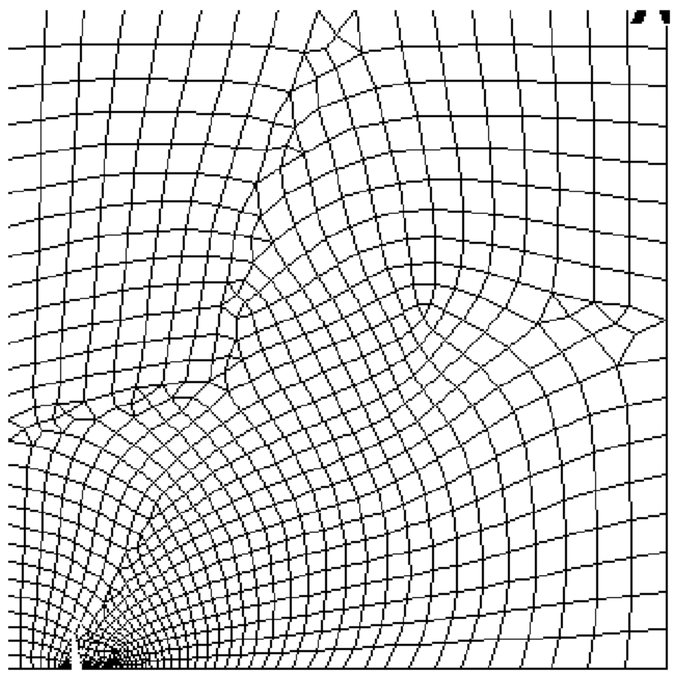


Рисунок 3.9 – Дискретная модель пластины

Пластины закреплены от горизонтальных перемещений вдоль оси y и от вертикальных перемещений вдоль по оси x.

Для достижения необходимой точности количество конечных элементов выбиралось путем постепенного уменьшения их размеров до значения, при которых КИН практически не менялся.

Расчет КИН производился прямым методом и через J-интеграл. В первом случае использованы формулы (3.1) и (3.2) при $\theta = 0$. При расчете по полю напряжений берется компонента $\sigma_y$, а при расчете по полю перемещений – компонента u. Эти компоненты брались в узловых точках на оси *x* у вершины трещины. Окончательное значение КИН определялось путем экстраполяции найденных значений на вершину трещины.

Как было отмечено выше в упругой области J-интеграл и КИН связаны соотношением

$$K_I^2 = E' \cdot J,$$

где $E' = E$ при плоском напряженном состоянии и $E' = E/(1-\nu^2)$ при плоской деформаций.

При решении этой задачи с целью отработки методики вычисления J-интеграла КИН определяем через J-интеграл. J-интеграл определялся по соотношениям (3.20) и (3.21) в следующей последовательности:

1. МКЭ решаем задачу об определении НДС и сохраняем компоненты напряжений и деформаций.
2. Рассчитываем значение удельной энергии деформации.
3. Определяем путь интегрирования, т.е задаются узлы по которым строится замкнутый контур.
4. Контур интегрирования разбивается на элементы контура ds и интерполируется значение удельной энергии деформации на заданный путь.
5. Расчитываем значение первой части J – интеграла, выполнив интегрирование W по переменной *y* вдоль пути *Г*.
6. Сохраняем результат интегрирования как скалярную переменную JA.
7. Определяем единичные вектора нормали вдоль пути интегрирования.
8. Отображаем компоненты вектора напряжений на заданный путь.
9. Рассчитываем значения векторов напряжений $T_x$ и $T_y$.
10. Выполняем расчет частных производных $\frac{\partial U_x}{\partial x}$ и $\frac{\partial U_y}{\partial x}$, входящих в подынтегральное выражение:

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} = \frac{U_{x2} - U_{x1}}{Dx}, \frac{\partial U_y}{\partial x} = \frac{U_{y2} - U_{y1}}{Dx}.$$

11. Рассчитываем подынтегральное выражение второй части J – интеграла.
12. Суммируем полученные значения подынтегрального выражения на каждом элементе контура ds и получаем значение второй части J – интегралапо переменной S вдоль пути *Г* (JB).
13. Вычисляем конечное значение J – интеграла путем вычитания второй части интеграла из первой. Результаты необходимо удвоить, т.к. расчет выполнялся с учетом симметрии, т.е. для одной части модели

$$J = 2(JA - JB).$$

Были проведены расчеты по определению КИН для $\sigma = 100 МПа$, $l/h = 0.1$, $l = 20 мм$ при различных $l/b$. КИН определялся прямым методом (КИН1) и через J-интеграл (КИН2). Результаты расчетов приведены в таблице 3.1. Там же для сравнения приведены результаты, заимствованные из работы [11, 210] (КИН3),

где эта задача также решалась МКЭ. Результаты свидетельствуют о приемлимости обоих методов для расчета КИН.

При расчете пластины с краевой трещиной (рис.3.8, б) ввиду симметрии рассматривалась только верхняя половина пластины. Расчеты проводились аналогично предыдущему.

Таблица 3.1 – Значения КИН (Н/мм$^{3/2}$) для центральной трещины

| l/b | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| КИН1 | 570,19 | 576,33 | 595,21 | 624,08 | 667,14 | 732,11 | 834,95 |
| КИН2 | 578,18 | 581,62 | 603,15 | 631,11 | 675,58 | 736,72 | 847,71 |
| КИН3 | 568,2 | 574,37 | 592,86 | 621,44 | 665,14 | 730,15 | 833,81 |

До настоящего времени большая часть работ по механике разрушения была посвящена трещинам нормального отрыва. Однако на практике часто трещина находится в несимметричном поле напряжений. Тогда у вершины трещины возникают деформации отрыва и сдвига, которые описывается двумя параметрами $K_I$ и $K_{II}$. В этом случае расчет МКЭ является основным методом решения.

Критериальные соотношения для этих элементов конструкции должны содержать КИН на отрыв $K_I$ и на сдвиг $K_{II}$. Эти коэффициенты лучше определять через J-интеграл, так как путем однократного обхода контура интегрирования можно определить оба коэффициента. Методика вычисления J-интеграла отработана нами выше.

Рассмотрим тело с трещиной наклоненной под углом α к оси X глобальной системы координат XY (рис. 3.10). С вершиной трещины свяжем локальную систему координат $X_1$, $Y_1$ . Энергетические интегралы в направлении этих осей обозначим $J_1$ и $J_2$, соответственно.

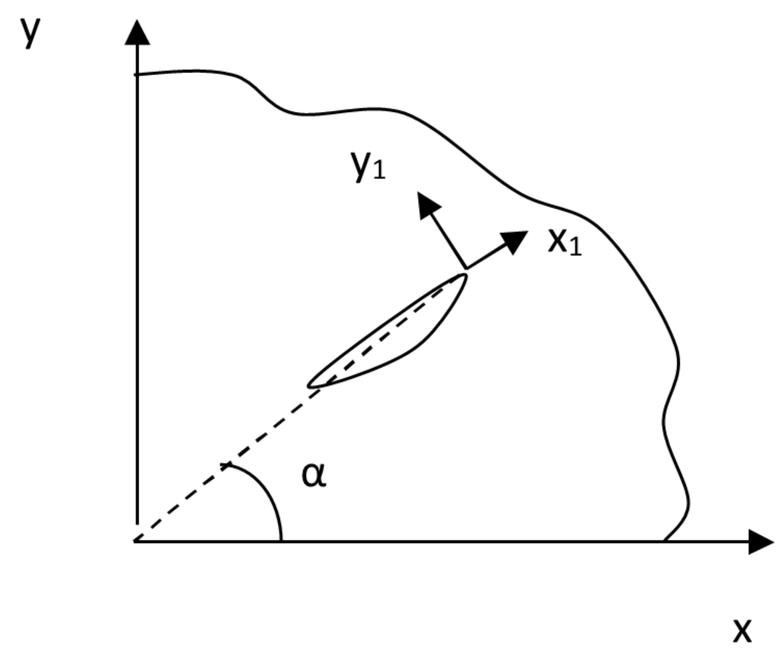



Рисунок 3.10 – Тело с наклонной трещиной

Эти интегралы связаны с $K_I$, $K_{II}$ следующими соотношениями:

$$J_1 = (K_I^2 + K_{II}^2)/E'; \quad J_2 = -2K_I K_{II}/E'. \tag{3.23}$$

Решая это уравнение, получаем:

$$K_I > K_{II} \ (\alpha \le 45^\circ),$$

$$K_I = (\sqrt{J_1 - J_2} + \sqrt{J_1 + J_2})\sqrt{E'}/2, \quad K_{II} = (\sqrt{J_1 - J_2} - \sqrt{J_1 + J_2})\sqrt{E'}/2;$$

$$K_I > K_{II} \ (\alpha > 45^\circ),$$

$$K_I = (\sqrt{|J_1 - J_2|} - \sqrt{|J_1 + J_2|})\sqrt{E'}/2, \quad K_{II} = (\sqrt{|J_1 - J_2|} + \sqrt{|J_1 + J_2|})\sqrt{E'}/2. \tag{3.24}$$

Исходя из основной формулы вычисления интеграла Черепанова - Райса, можно записать:

$$J_1 = \int_\Gamma W dy_1 - \int_\Gamma (T_x \frac{\partial u}{\partial x_1} + T_y \frac{\partial V}{\partial x_1}) ds = J_{W1} - J_{U1};$$

$$J_2 = \int_\Gamma W dx_1 - \int_\Gamma (T_x \frac{\partial u}{\partial y_1} + T_y \frac{\partial V}{\partial y_1}) ds = J_{W2} - J_{U2}. \tag{3.25}$$

Так как перемещения и напряжения определяются в глобальной системе координат, то от дифференциала и производных в локальных координатах надо перейти к производным по глобальным координатам. Связь между глобальной и локальной системами координат имеет вид:

$$x = x_1 \cos\alpha_1 - y_1 \sin\alpha; \quad y = x_1 \sin\alpha_1 + y_1 \cos\alpha;$$

$$x_1 = y\sin\alpha + x\cos\alpha; \qquad y_1 = y\cos\alpha - x\sin\alpha.$$

Используя эту связь, преобразуем выражение для $J_1$:

$$J_{W1} = \int_\Gamma W dy_1 = \cos\alpha \int_\Gamma W dy - \sin\alpha \int_\Gamma W dx; \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha;$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\sin\alpha\ ;$$

$$J_{U1} = \int_{\Gamma} T_x(\cos\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial u}{\partial y})ds + \int_{\Gamma} T_y(\cos\alpha\frac{\partial V}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial V}{\partial y})ds. \quad (3.27)$$

Аналогично можно записать интеграл $J_2$:

$$J_{W2} = \sin\alpha\int_{\Gamma} W dy + \cos\alpha\int_{\Gamma} W dx; \quad (3.28)$$

$$J_{U2} = \int_{\Gamma} T_x(\cos\alpha\frac{\partial u}{\partial y} - \sin\alpha\frac{\partial u}{\partial x})ds + \int_{\Gamma} T_y(\cos\alpha\frac{\partial V}{\partial y} - \sin\alpha\frac{\partial V}{\partial x})ds.$$

В этих формулах $ds = dy/\cos\theta = -dx/\sin\theta$, где θ – угол между нормалью к контуру ds и осью X. Вычисление интегралов (3.26÷3.28) описано в предыдущем параграфе.

Рассмотрим задачу об определении коэффициентов интенсивности напряжений в прямоугольной пластине конечных размеров с центральной наклонной трещиной в поле растягивающих напряжений (рис.3.11).

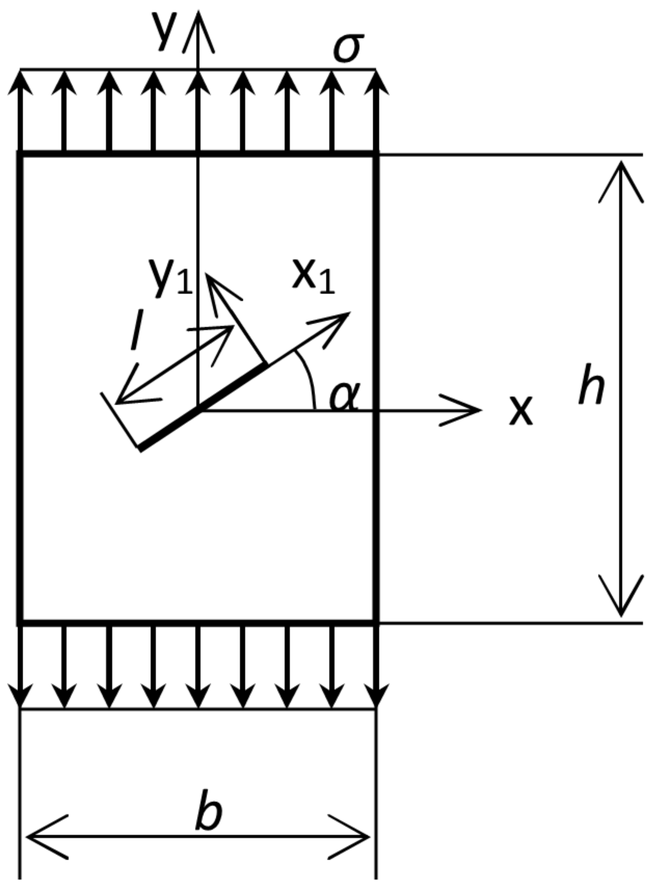



Рисунок 3.11 – Прямоугольная пластина с наклонной трещиной

Для такой пластины бесконечных размеров имеется аналитическое решение

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\cos^2\alpha\,, \quad K_{II} = \sigma\sqrt{\pi a}\sin\alpha\cos\alpha\,, \tag{3.29}$$

где $a$ – половина длины трещины.

Задача вновь решалась применением элемента Plane 82. Процедура разбиения на конечные элементы, сгущения сетки у вершины трещины, трансформации четырехугольных элементов в треугольные и сдвиг промежуточных точек к вершине трещины проводилась программой автоматически.

Наименьший размер конечного элемента выбирался из решения тестовой задачи для квадратной пластины больших размеров. Это решение сравнивалось с теоретическим решением (3.29). При этом размер элемента уменьшался постепенно до совпадения результата с теоретическим решением.

После выбора размеров конечных элементов выполнено сопоставление решения по МКЭ для квадратной пластины с теоретическим решением (3.29) для различных отношений l/b. В расчетах МКЭ сначала вычислялись интегралы $J_1$ и $J_2$ по формулам (3.26-3.28), затем по формуле (3.24) определялись КИН ($K_1$, $K_{II}$).

На рисунке 3.12 сплошными линиями показаны теоретическое решение для бесконечной пластины. Там же пунктирными линиями показаны решения по МКЭ для l/b=0,4, а крестиком помечены решения по МКЭ для l/b=0,1. Мы видим, что при малых значениях отношения длины трещины к наименьшему размеру пластины для расчета КИН можно использовать формулу (3.29) С ростом этого отношения погрешность теоретического решения возрастает и при l/b=0,4 достигает 24%. Отсюда следует, что для пластин конечных размеров расчет КИН надо проводить МКЭ.

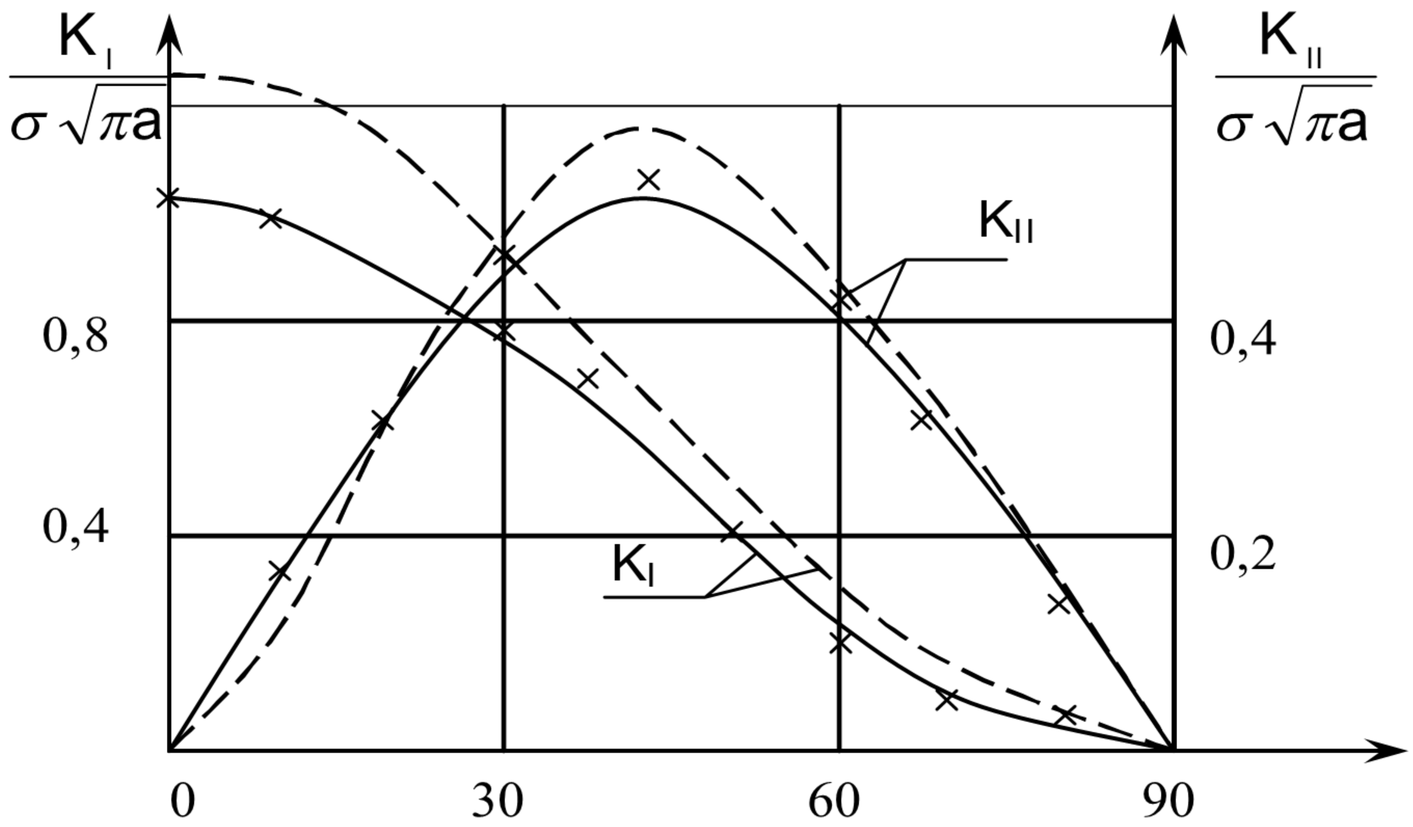



Рисунок 3.12 – Графики изменения КИН от угла наклона трещины

## 3.4 Определение коэффициента интенсивности напряжений в изгибаемых железобетонных элементах

Определение КИН в железобетонных элементах имеет свои особенности. КИН является основным параметром линейной механики разрушения, поэтому он определяется из расчетов в линейной постановке. Вместе с тем связь между напряжением и деформацией в бетоне не линейна. Это вносит погрешность в определение КИН. Эта погрешность несколько сглаживается тем, что при экспериментальном определении предельного значения КИН разрушающую нагрузку подставляют в соотношения, полученные также из линейного решения. В связи с этим КИН вполне пригоден для оценки характера развития (устойчивости) трещины.

В общем случае КИН определяется методом конечных элементов, как это сделано выше для металлоконструкций. Учитывая приближенный характер определения КИН, в данной работе предлагается приближенный аналитический метод определения КИН в изгибаемых железобетонных элементах. Если уровень напряжений в элементе невысокий, то можно решать задачу упрощенно в линейной постановке. Такой подход вполне оправдан, когда номинальное напряжение у вершины трещины (без учета концентраций напряжений) не превышает предела прочности бетона на растяжение. В общем случае задача решается в нелинейной постановке. При этом номинальные напряжения определяются с учетом физической нелинейности, а в области концентрации напряжений решение берется из линейной теории упругости.

Предлагаемый метод расчета базируется на известном методе сечений. Сечение проводится по линии трещины. Условие равновесия сил для отсеченной части балки заменяются условием равенства продольных сил у вершины трещины с учетом и без учета концентрации напряжений. Размер зоны концентрации напряжений определяется из условия равенства местного напряжения номинальному напряжению.

Основные соотношения для КИН получены для прямоугольного сечения, но метод можно использовать и для сечения общего вида, рассмотренного в предыдущей главе. Для прямоугольного сечения проще аналитически определить номинальные напряжения и длину трещины. Для этих целей можно использовать и ранее полученные регрессионные зависимости. Это позволяет проанализировать влияние различных факторов на изменения КИН.

### 3.4.1 Определение КИН в линейной постановке

Сначала определим номинальное напряжение в балке с трещиной известной длины l в линейной постановке. Для этого воспользуемся методикой, использованной при расчете предварительно напряженных балок (§2.1.2). За основные неизвестные задачи примем растягивающее напряжение у вершины трещины $\sigma_m$ и высоту сжатой зоны $x$ (рисунок 3.13, б).

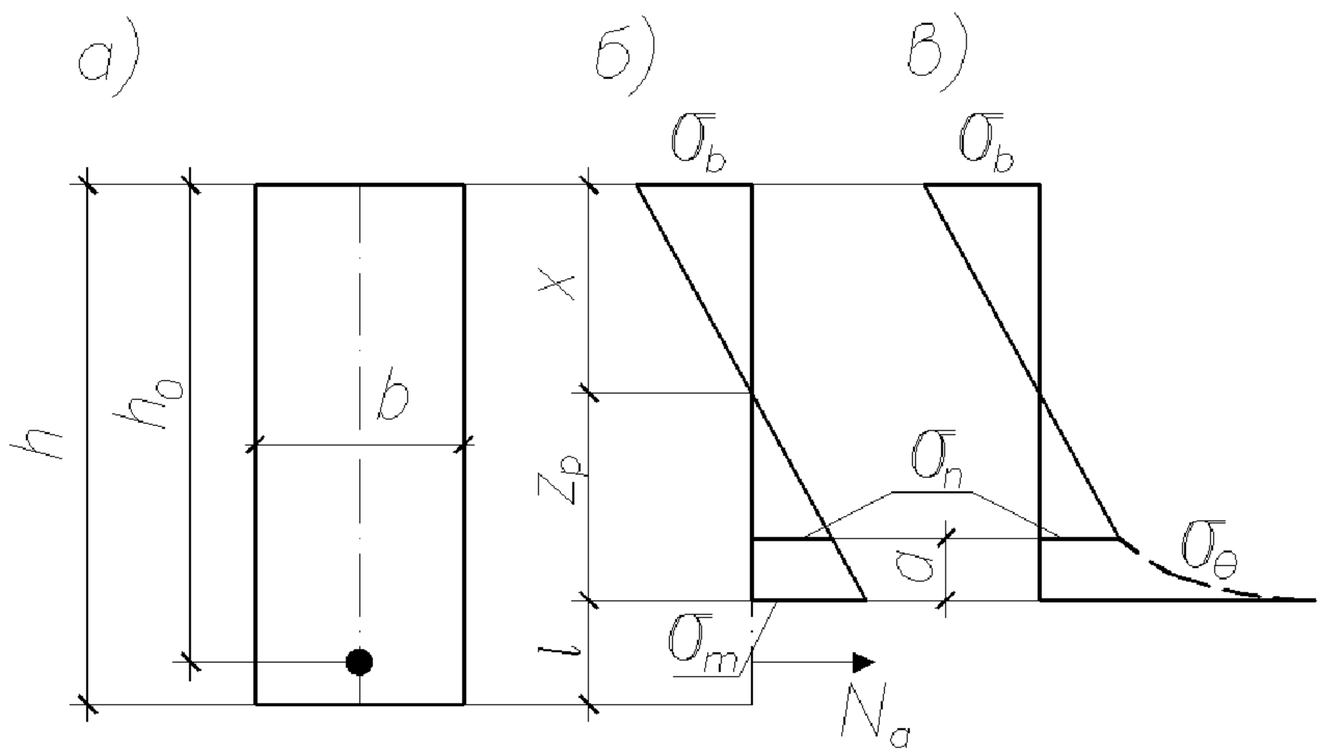



Рисунок 3.13 – К определению КИН в линейной постановке

Учитывая линейность эпюры напряжений, определим максимальное сжимающее напряжение в бетоне

$$\sigma_b = \sigma_m x / z_p.$$

Деформацию на уровне арматуры с учетом неравномерности распределения напряжений в бетоне и арматуре определяем, как и при выводе формулы (2.51) (§2.3.2):

$$\varepsilon_s = \varepsilon_m \frac{\psi_b}{\psi_s} \cdot \frac{h_0 - x}{z_p} = \varepsilon_m \psi_{bs} (h_0 - x) / z_p .$$

Напряжение в арматуре

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s = \alpha \sigma_m \psi_{bs} (h_0 - x) / z_p .$$

Условие равновесия продольных сил в сечении

$$\sigma_m b z_p / 2 + \sigma_s A_s - \sigma_b b x / 2 = 0.$$

С учетом выражений для $\sigma_s$, $\sigma_b$ и безразмерных параметров, введенных в главе 2 (§2.3.2), получаем

$$\lambda^2 - \xi^2 + \alpha \mu \psi_{bs} \left( \overline{h_0} - \xi \right) = 0.$$

Далее учтем, что

$$z = l/h,\ \lambda = 1 - z - \xi,\quad \bar{h} = h_0/h$$

и найдем высоту сжатой зоны

$$\xi = \frac{(1-z)^2 + \alpha\mu\psi_{bs}\bar{h}}{2(1-z) + \alpha\mu\psi_{bs}}. \qquad (3.30)$$

Момент сил относительно нулевой линии

$$\sigma_b b x^2/3 + \sigma_m b z_p^2/3 + \sigma_s A_s (h_0 - x) = M_{bn},$$

где внешний момент $M_{bn}$ равен изгибающему моменту в сечении с трещиной $M$ для арматуры без предварительного напряжения, а для предварительно напряженной арматуры по аналогии с (2.53)

$$M_{bn} = M - \sigma_{sp} A_s (h_0 - x).$$

Переходя к безразмерным параметрам, имеем

$$\sigma_m \left[ \xi^3 / \lambda + \lambda^2 + 3\alpha\mu\psi_{bs} \left( \bar{h} - \xi \right)^2 / \lambda \right] = 3M_{bn}/bh^2.$$

Отсюда можно найти номинальное напряжение у вершины трещины

$$\sigma_m = LM_{bn}/W, \qquad (3.31)$$

где $W = bh^2/6$, $L = 0{,}5\lambda / [\xi^3 + \lambda^3 + 3\alpha\mu\psi_{bs} \left( \bar{h} - \xi \right)^2]$.

Параметры $\lambda(\xi)$, $L$ не зависят от размеров сечения и действующих нагрузок. Поэтому целесообразно заранее построить график зависимости этих параметров от длины трещины. На рисунке 3.14 приведен такой график для $\bar{h} = 0{,}907$, $\nu = \alpha\mu\psi_{bs} = (200/24) \cdot 0{,}015 (0{,}6/0{,}5) = 0{,}15$.

Это решение справедливо, пока номинальное напряжение меньше или равно пределу прочности бетона на растяжение $R_{bt}$. В противном случае первоначальная длина трещины увеличится. Значение момента, при котором это произойдет, равно

$$M_m = R_{bt} W / L . \qquad (3.32)$$

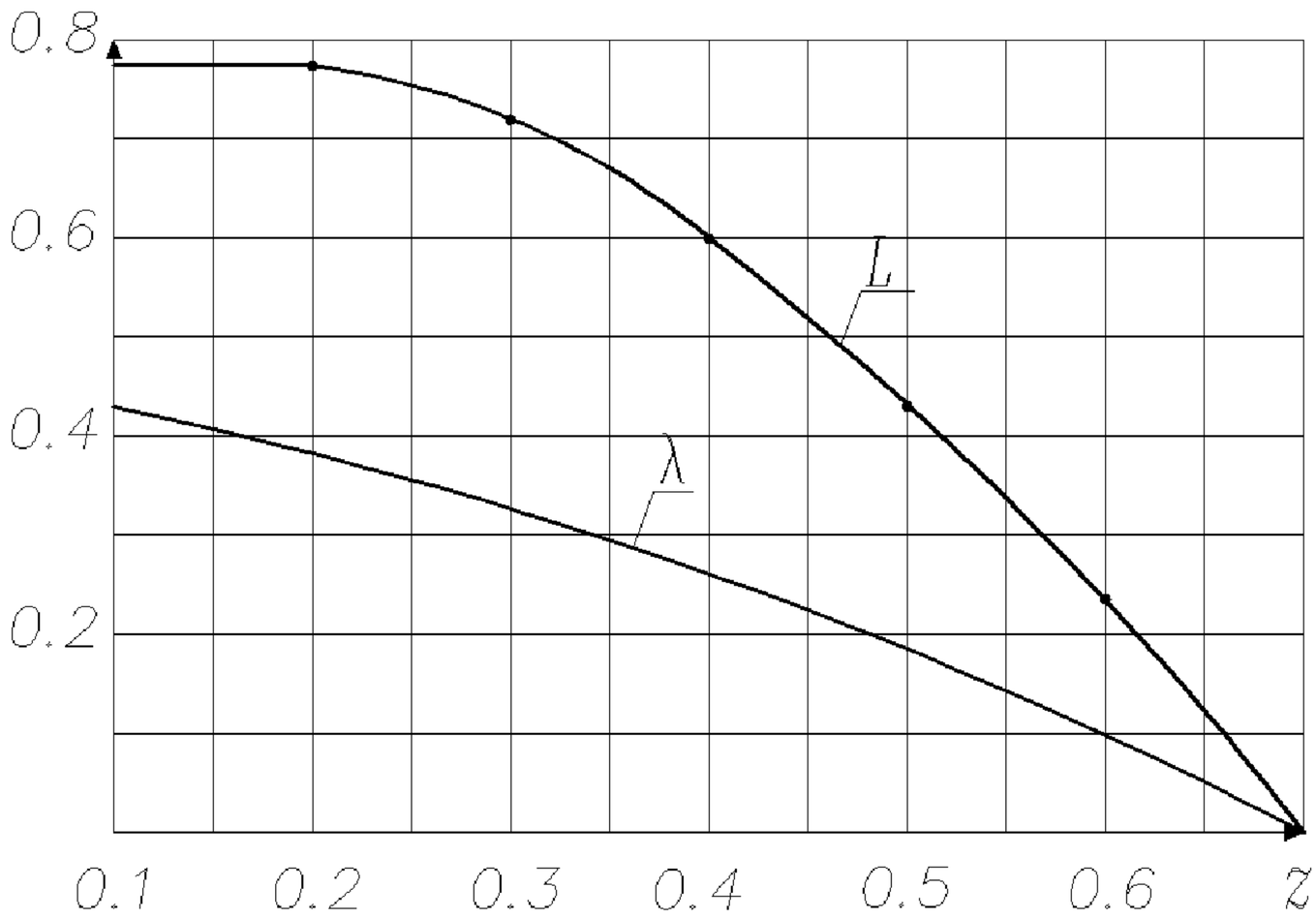



Рисунок 3.14 – График зависимости параметров напряженного состояния от длины трещины

Используя график на рисунке 3.14 и формулу (3.32) можно найти значения момента по росту трещины $M_m$. Во второй строке таблицы 3.2 приведены значения этого момента в *кНм* для балки сечением (15х30)см.

Определим КИН у вершины трещины по вышеизложенной методике. Вершина трещины является сильным концентратором напряжений. Согласно линейной теории упругости там напряжение определяется по формуле

$$\sigma_\theta = K_I \Big/ \sqrt{2\pi r} , \qquad (3.33)$$

где $r$ – расстояние от вершины трещины до рассматриваемой точки.

Определим длину зоны концентрации напряжений *«a»* из условия равенства номинального и местного напряжения в конце этой зоны (рис.3.13,в). Номинальные напряжения на расстоянии *«a»* от вершины трещины

$$\sigma_n = \sigma_m \left(1 - a/z_p\right) = \sigma_m \left(1 - t\right).$$

Приравнивая местное напряжение этому значению, получим

$$a = K_I^2 \Big/ 2\pi\sigma_n^2 .$$

Продольные силы на единицу ширины балки в зоне концентрации равны

$$I_1 = \int_0^a \sigma_\theta \, dr = K_I \sqrt{2a/\pi} = K_I^2 / \pi\sigma_n . \qquad (3.34)$$

Продольные силы в этой же зоне без учета концентрации напряжений равны

$$I_2 = \frac{\sigma_m + \sigma_n}{2} a = \frac{\sigma_m + \sigma_n}{2} \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_n^2} .$$

Приравняв эти силы, получим

$$\sigma_m = 3\sigma_n .$$

Отсюда следует $t = 2/3$.

Теперь находим КИН

$$K_I = \sqrt{2\pi a}\sigma_n = 0.683\sigma_m\sqrt{z_p} .$$

Подставив сюда (3.31), окончательно получим

$$K_I = Y(z)\sqrt{h}M_{bn}/W, \qquad (3.35)$$

где $Y(z) = 0,683 L\sqrt{\lambda}$.

Отсюда видим, что с ростом номинального напряжения (изгибающего момента) КИН растет линейно. Проанализируем изменение КИН от длины трещины. Оно определяется функцией Y(z), где параметры Lи $\lambda$можно взять из графика на рисунке 3.14. В таблице 3.2 приведено изменение КИН (МН/$м^{3/2}$)в балке сечением (15х30) см при действии момента $M = 4,5$ *кНм* ($M < M_m$).

Таблица 3.2

| Z | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_m$ | 4,61 | 4,63 | 5,0 | 6,0 | 8,28 | 15,5 | $> M_p$ |
| $K_I$ | 0,378 | 0,347 | 0,293 | 0,217 | 0,131 | 0,051 | 0 |

Мы видим, что с увеличением длины трещины КИН уменьшается до нуля. Это объясняется тем, что при изгибе обязательно существует минимальная зона сжимающих напряжений. При росте длины трещины это снижает длину зоны

растягивающих напряжений ($z_p = h - x - l$) до нуля. В этом случае растягивающие усилия воспринимаются только арматурой, трещина не развивается. При этом КИН становится равным нулю и происходит разрушение балки за счет достижения предела текучести в арматуре или дробления бетона сжатой зоны.

Если при известной длине трещины и заданном моменте КИН окажется меньше предельного значения $K_{IC}$ для данного материала, то имеет место устойчивое развитие трещины. Если $K_I \geq K_{IC}$, то трещина неустойчива и возможен быстрый рост трещины при незначительном увеличении момента. Рост длины трещины продолжается до тех пор пока КИН не снизится до значения $K_{IC}$. Этому значению КИН соответствует некоторое значение длины трещины, которое определяется из уравнения (3.35). Это значение легче найти графически, построив зависимость $K_I$otz с помощью графиков 2.14.

Если номинальное напряжение у вершины трещины $\sigma_m$ превышает предел прочности бетона $R_{bt}$ ($M_{bn} > M_m$), то длина трещины увеличится. Для определения новой длины трещины в (3.31) полагаем $L = R_{bt}W/M$. Далее из системы нелинейных уравнений (3.30) и (3.31) определяем $\xi$ иz. Для решения этой системы можно использовать и графики на рисунке 3.14.При определении КИН номинальное напряжение у вершины трещины принимается равным пределу прочности.Тогда выражение (3.35) примет вид

$$K_I = 0,683\sqrt{\lambda h}R_{bt}. \qquad (3.35')$$

Проанализируем изменение КИН от длины трещины при $M = 6\,Кн\cdot м$. Из таблицы 3.2 заключаем, что в этом случае $M > M_m$ для $z_0 = 0,1 \div 0,3$, $M = M_m$ при $z_0 = 0,4$ и $M < M_m$ при $z_0 = 0,5$ и 0,6. При $z_0 \leq 0,4$

$$L = 1,6\cdot 10^3 \cdot 2,2510^{-3}/6 = 0,6.$$

Из графика рисунка 3.14 находим $\lambda = 0,233$ и далее по формуле (3.35') находим

$$K_I = 0,683\cdot 1,6\sqrt{0,233\cdot 0,3} = 0,29\ Мн/м^{3/2}.$$

При $z_0$=0,5

$$\sigma = M/W = 6\cdot 10^3/2,25\cdot 10^{-3} = 2,667\ МПа.$$

По графику на рисунке 3.14 находим $L=0{,}435$, $\lambda=0{,}164$. Далее по формуле (3.35) находим $K_I = 0{,}175\ Мн/м^{3/2}$. Аналогично определяется КИН при $z_0=0{,}6$: $K_I = 0{,}069\ Мн/м^{3/2}$.

Сравнение этих результатов с результатами таблицы 3.2 показывает, что при $M>M_m$ КИН не зависит от длины начальной трещины. Он зависит только от длины эксплуатационной трещины, которая зависит от действующего момента. При $M<M_m$ КИН уменьшается с ростом начальной трещины вплоть до разрушения, при котором КИН равен нулю.

Проанализируем изменение КИН с изменением внешнего момента. Для этого проведем расчет КИН при $z_0=0{,}2$ $\left(M_m = 4{,}63\,кНм\right)$. Результаты приведены в таблице 3.3, где момент в $кНм$, КИН в $МН/м^{3/2}$.

Таблица 3.3 – Изменение КИН от момента

| $M$ | 2 | 4 | 4,63 | 6 | 8 | 12 | 16 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $K_I$ | 0,154 | 0,308 | 0,357 | 0,29 | 0,255 | 0,203 | 0,178 | 0,159 |

Из таблицы видно, что, если $M<M_m$, то КИН растет прямо пропорционально моменту, достигая максимума при $M=M_m$. При $M>M_m$ КИН уменьшается в связи с ростом длины эксплуатационной трещины.

Основная погрешность линейного решения заключается в определении напряженного состояния сечения с трещиной [211, 212]. В этом отношении более точные результаты дает решение в нелинейной постановке [213].

### 3.4.2 Определение КИН в нелинейной постановке

Здесь также надо отдельно рассмотреть случай, когда напряжение у вершины трещины $\sigma_m$ меньше предела прочности бетона. В этом случае расчет напряженного состояния можно вести, как и предварительно напряженных балок (§2.1.3): эпюра сжимающих напряжений принимается линейной, а эпюра растягивающих напряжений – криволинейной. Тогда расчетная схема к определению КИН имеет вид рисунка 3.13, с заменой эпюры растягивающих напряжений на криволинейную (смотри также рисунок 2.2,в). По прежнему считаем справедливым гипотезу плоских сечений для части сечения, сохраняющую сплошность. Напряжения в растянутой зоне выражаем через деформацию по закону (2.14). Длину трещины $l$ считаем известной.

Определим сначала момент $M_m$, соответствующий предельному случаю, когда $\sigma_m = R_{bt}$. Тогда уравнение равновесия отсеченной части балки вновь приводят к системе уравнений (2.59).

Первое уравнение системы с учетом того, что $\lambda = 1 - z - \xi$, можно записать так:

$$0,256\left(1-\mathsf{z}\right)^2-0,512\left(1-\mathsf{z}\right)\xi-0,244\xi^2+\alpha\mu\psi_{\mathsf{bs}}\left(\bar{\mathsf{h}}-\xi\right)=0.$$

Отсюда определим высоту сжатой зоны через длину трещины

$$\xi=-\mathsf{P}\pm\sqrt{\mathsf{P}^2+\mathsf{q}},\qquad(3.36)$$

где $\mathsf{P}=1,049(1-\mathsf{z})+2,049\alpha\mu\psi_{\mathsf{bs}}$, $\mathsf{q}=1,049(1-\mathsf{z})^2+4,098\alpha\mu\psi_{\mathsf{bs}}\bar{\mathsf{h}}$.

Далее из второго уравнения системы (2.59) находим момент по образованию трещины

$$\begin{aligned}\mathsf{L}_{\mathsf{m}}&=\mathsf{M}_{\mathsf{m}}/\mathsf{bh}^2\mathsf{R}_{\mathsf{bt}}=0,418\lambda^2-0,683\lambda(0,5-\xi)+\\&+\left[2,667\alpha\mu\psi_{\mathsf{bs}}\left(\bar{\mathsf{h}}-\xi\right)\left(\bar{\mathsf{h}}-0,5\right)+0,667\left(1-\xi\right)\xi^2\right]/\lambda\,.\end{aligned}\qquad(3.37)$$

Когда действующий внешний момент превосходит момент $\mathsf{M}_{\mathsf{m}}$, происходит подрастание начальной длины трещины. Когда момент $\mathsf{M}_{\mathsf{m}}$ равен разрушающему моменту $\mathsf{M}_{\mathsf{p}}$ происходит разрушение балки. Этому случаю соответствует некоторая предельная длина начальной трещины $\mathsf{z}_{\mathsf{op}}$. Для ее определения по соотношениям (3.36) и 3.37 построим график зависимости $\mathsf{L}_{\mathsf{m}}$ от длины трещины $\mathsf{z}$. Такой график приведен на рисунке 3.15.

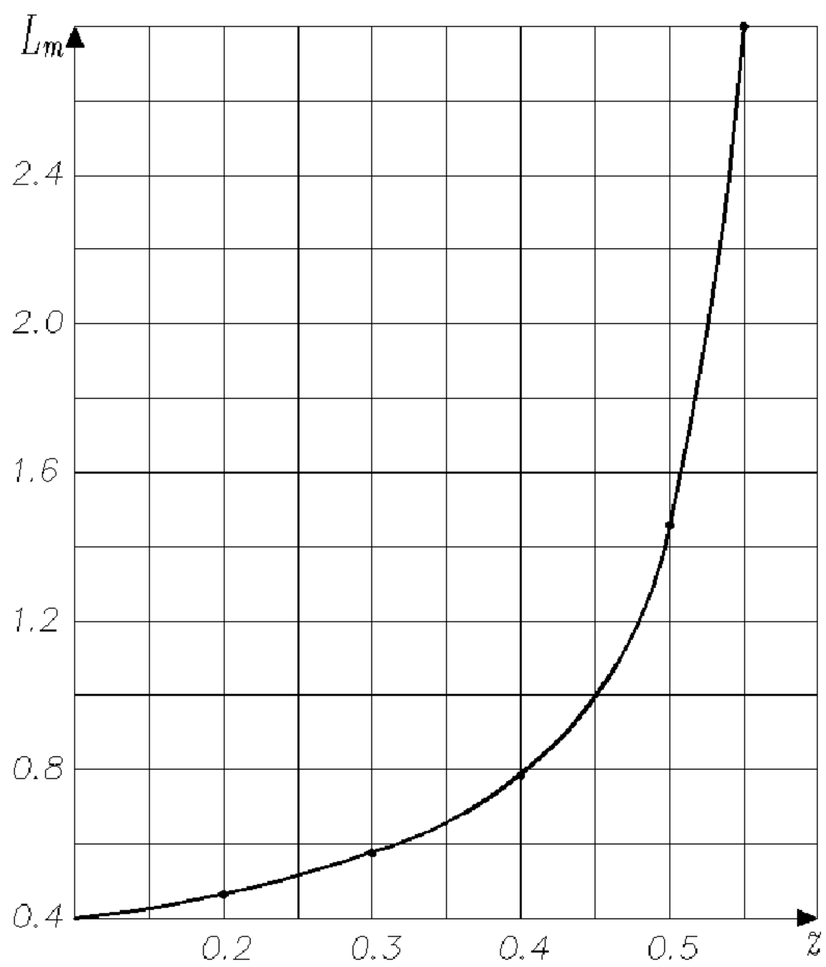



Рисунок 3.15 – К определению предельной длины трещины

Далее для рассматриваемой балки определяем предельное значение параметра

$$\mathsf{L}_{\mathsf{mp}}=\mathsf{M}_{\mathsf{p}}/\mathsf{bh}^2\mathsf{R}_{\mathsf{bt}}.$$

Теперь из графика на рисунке 3.15 находим предельное значение длины трещины для этой балки.

Так для балки из бетона В25 с размерами (15х30) см

$$L_{mp} = 53,6 / 0,15 \cdot 0,3^2 \cdot 1600 \ = 2,48.$$

Из графика далее находим $z_{op} = 0,546.$

Определим теперь напряженное состояние в сечении с трещиной известной длины. Этот расчет аналогичен расчету напряженного состояния с определением длины трещины (§2.3.2). В отличие от этого расчета здесь не известно напряжение у вершины трещины, но известна ее длина (там было наоборот).

Вновь введем обозначения (2.15):

$$c = \sigma_m / 1,1 R_{bt}, \ \ y = -\ln(1-c).$$

Тогда деформация у вершины трещины определяется выражением (2.16)

$$\varepsilon_m = 1,1 y R_{bt} / E_b .$$

Деформация и напряжение на краю сжатой зоны с учетом гипотезы плоских сечений будут равны (рис. 3.13)

$$\varepsilon_b = \varepsilon_m x / z_p, \quad \sigma_b = E_b \varepsilon_b = 1,1 y R_{bt} x / z_p .$$

Определим напряжение в арматуре аналогично тому, как это сделано при выводе формулы (2.51):

$$\varepsilon_s = \varepsilon_m \psi_{bs} (h_0 - x) / z_p, \ \sigma_s = E_s \varepsilon_s = 1,1 y R_{bt} \alpha \psi_{bs} (h_0 - x) / z_p .$$

Запишем уравнение равновесия сил в сечении балки

$$N_p + \sigma_s A_s - 0,5 \sigma_b b x = 0.$$

Равнодействующая внутренних сил в растянутой зоне $N_p$ и их момент относительно нулевой линии $M_{po}$ определяются по формулам (2.19) и (2.20) с заменой $h - x$ на $z_p$:

$$N_p = nb\sigma_m z_p, \qquad M_{po} = m\sigma_m b z_p^2, \qquad M_{pc} = M_{po} - N_p (h/2 - x),$$

где $n = 1/c - 1/y$, $m = [0.5 + (1-c)(1+y)/y^2 - 1/y^2]/c$; $M_{pc}$ - момент относительно центральной оси.

С учетом этого и найденных выше напряжений, уравнение равновесия можно записать в безразмерном виде:

$$nc\lambda^2 - 0,5y\xi^2 + y\alpha\mu\psi_{bs}(\bar{h} - \xi) = 0.$$

Это уравнение приводится к квадратному уравнению относительно высоты сжатой зоны. Его решение имеет вид

$$\xi = P \pm \sqrt{P^2 - q}, \tag{3.38}$$

где $P = \dfrac{2nc(1-z) + \alpha\mu\psi_{bs} y}{2nc - y}$, $q = \dfrac{2nc(1-z)^2 + 2\alpha\mu\psi_{bs}\bar{h} y}{2nc - y}$.

Запишем сумму моментов всех сил относительно центра тяжести бетона

$$M_{pc} + \sigma_s A_s (h/2 - a) + 0,5\sigma_b bx(h/2 - h/3) = M_{bn}.$$

Здесь момент внутренних сил в растянутой зоне $M_{pc}$ найдено в параграфе 2.3.2, а момент внешних сил $M_{bn}$ определяется там же выражением (2.53). С учетом этого распишем уравнение моментов так:

$$\sigma_m bz_p \left[ mz_p - n\left(\frac{h}{2} - x\right)\right] + 1,1yR_{bt}\alpha\mu\psi_{bs}A_b(h_0 - x)\left(\frac{h}{2} - a\right)\Big/ z_p + \frac{1}{2}b1,1R_{bt}x^2\left(\frac{h}{2} - \frac{h}{3}\right)\Big/ z_p = M_{bn}.$$

Перепишем это уравнение в безразмерном виде

$$\begin{aligned} L = M_{bn}/bh^2R_{bt} &= c\lambda\left[m\lambda - n(0,5 - \xi)\right] + \\ &+ y\alpha\mu\psi_{bs}(\bar{h} - \xi)(0,5 - a_0)/\lambda + 0,5y(0,5 - \xi/3)\xi^2/\lambda. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Решение этого трансцендентного уравнения относительно параметра «*c*» дает возможность определить напряжение у вершины трещины в зависимости от внешнего момента. Решение этого уравнения лучше провести графическим методом. Для известной длины трещины $z$ задаемся значениями «*c*» от 0,1 до 0,9 (при $\sigma_m = R_{bt}$, $c = 0,909$) и по соотношениям (3.38) и (3.39) определяем параметр $L$ и строим график зависимости $L = f(c)$. Для действующего момента определяем действительное значение параметра $L$ и по графику определяем соответствующее значение «*c*», а затем и напряжение у вершины трещины

$$\sigma_m = 1,1cR_{bt}.$$

Эти расчеты легко программируются. В таблице 3.4 приведены результаты таких расчетов на Matlabe.

Таблица 3.4 – Значение безразмерного параметра нагрузки L

| c | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z=0,1 | 0,026 | 0,054 | 0,084 | 0,117 | 0,154 | 0,196 | 0,247 | 0,312 | 0,413 |
| z=0,2 | 0,027 | 0,055 | 0,086 | 0,121 | 0,16 | 0,205 | 0,261 | 0,335 | 0,452 |
| z=0,3 | 0,03 | 0,062 | 0,097 | 0,137 | 0,182 | 0,236 | 0,303 | 0,393 | 0,54 |
| z=0,4 | 0,038 | 0,08 | 0,126 | 0,179 | 0,24 | 0,313 | 0,405 | 0,531 | 0,741 |
| z=0,5 | 0,066 | 0,139 | 0,22 | 0,314 | 0,423 | 0,555 | 0,723 | 0,957 | 1,352 |
| z=0,6 | 0,863 | 1,827 | 2,919 | 4,178 | 5,666 | 7,486 | 9,829 | 13,13 | 18,766 |

В таблице 3.5 приведены значения безразмерного параметра длины растянутой зоны $\lambda$, которые получены в ходе этого расчета. Этот параметр в дальнейшем нужен при определении КИН

Таблица 3.5 – Значение безразмерного параметра $\lambda$

| c | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z=0,1 | 0,366 | 0,37 | 0,375 | 0,38 | 0,386 | 0,393 | 0,401 | 0,411 | 0,425 |
| z=0,2 | 0,305 | 0,309 | 0,312 | 0,316 | 0,321 | 0,326 | 0,332 | 0,339 | 0,35 |
| z=0,3 | 0,242 | 0,244 | 0,246 | 0,249 | 0,252 | 0,256 | 0,26 | 0,265 | 0,272 |
| z=0,4 | 0,173 | 0,174 | 0,176 | 0,177 | 0,179 | 0,181 | 0,183 | 0,186 | 0,19 |
| z=0,5 | 0,096 | 0,097 | 0,097 | 0,098 | 0,099 | 0,099 | 0,1 | 0,101 | 0,102 |
| z=0,6 | 0,007 | 0,007 | 0,007 | 0,007 | 0,007 | 0,007 | 0,007 | 0,007 | 0,007 |

По табличным значениям можно построить графики зависимости $L = f(c)$, $\lambda = f(c)$ для известного значения z. Такие графики приведены на рисунках 3.16 и 3.17. Здесь кривые 1, 2, 3 относятся к z=0,1, 0,2 и 0,3 соответственно.

Из таблицы 3.4 видно, что, когда z превышает предельное значение $z_{op}$, разрушение балки может наступить и при номинальных напряжениях у вершины трещины, меньших предела прочности бетона. Чтобы найти разрушающее значение этого напряжения при $z > z_{op}$, надо по предельному значению $L_{mp}$ из графика типа 3.16 надо найти $C_p$, а через него и разрушающее номинальное напряжение $\sigma_{mp}$. Для рассмотренной выше балки было

$L_{mp} = 2,48,\ z_{op} = 0,546.$ При $z = 0,6$ и $L = 2,48$ из графика находим $C_p = 0,259$, тогда

$$\sigma_{mp} = 1,1 R_{bt} C_p = 1,1 \cdot 1,6 \cdot 0,259 = 0,456 \text{МПа}.$$

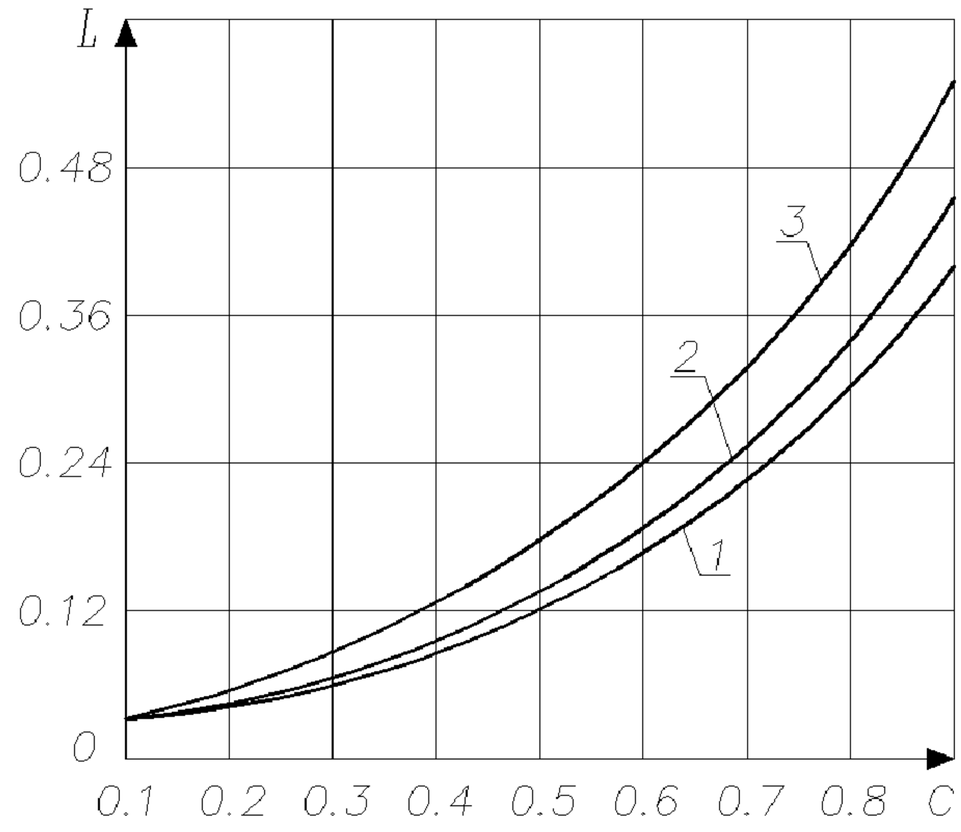



Рисунок 3.16 – График зависимости напряжения у вершины трещины от безразмерного момента

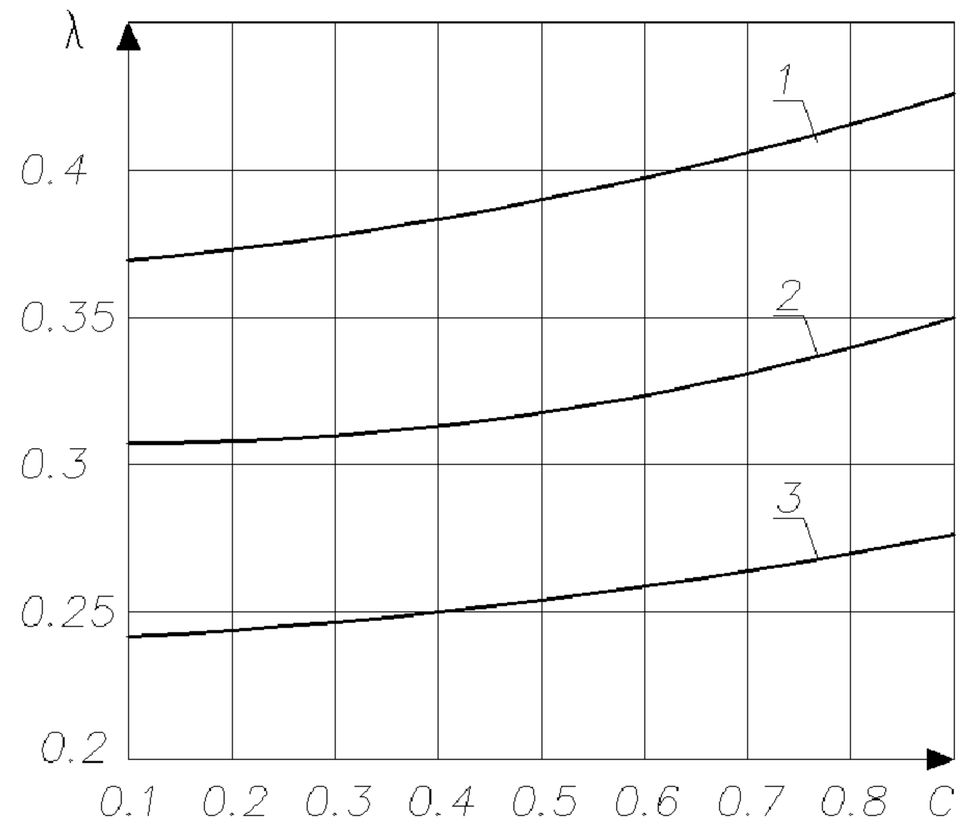



Рисунок 3.17 – График зависимости высоты растянутой зоны от напряжения у вершины трещины

Переходим к определению КИН. Определим напряжение в конце зоны концентрации напряжений (на расстоянии *«a»* от вершины трещины), когда напряжение с учетом и без учета концентрации напряжений совпадают

$$\sigma_n = 1,1 R_{bt} \left[ 1 - \exp\left( -0,9 \frac{E_b}{R_{bt}} \cdot \varepsilon_m \frac{z_p - a}{z_p} \right) \right].$$

Подставляя сюда деформацию у вершины трещины $\varepsilon_m$, с учетом прежнего обозначения $t = a/z_p$, получим

$$\sigma_n = 1{,}1R_{bt}\left[1-\left(1-c\right)^{1-t}\right]. \qquad (3.40)$$

Продольные силы на единицу ширины сечения в этой зоне без учета концентрации напряжений равны

$$I_2 = \int_{z_p-a}^{z_p} \sigma \, dz = 1{,}1R_{bt}\int_{z_p-a}^{z_p}\left[1-\exp\left(-\frac{y}{z_p}z\right)\right]dz.$$

После интегрирования и несложных преобразований, получим

$$I_2 = 1{,}1R_{bt}z_p\left\{t+\left[1-c-\left(1-c\right)^{1-t}\right]/y\right\}. \qquad (3.41)$$

Продольные силы в зоне концентрации напряжений по прежнему определяется выражением (3.34). Приравнивая эти силы, получим

$$I_2 = 2a\sigma_n.$$

Подставляя сюда (3.40) и (3.41), запишем

$$t+\left[1-c-\left(1-c\right)^{1-t}\right]/y = 2t\left[1-\left(1-c\right)^{1-t}\right].$$

Перепишем это уравнение в виде

$$f(t) = t-\left(1-c\right)^{1-t}\left(2t-1/y\right)-\left(1-c\right)/y = 0.$$

Решая это уравнение при известном $c(y)$, находим параметр $t$. График зависимости $t = f(c)$, рассчитанный с помощью ПК Matlab, приведен на рисунке 3.18.

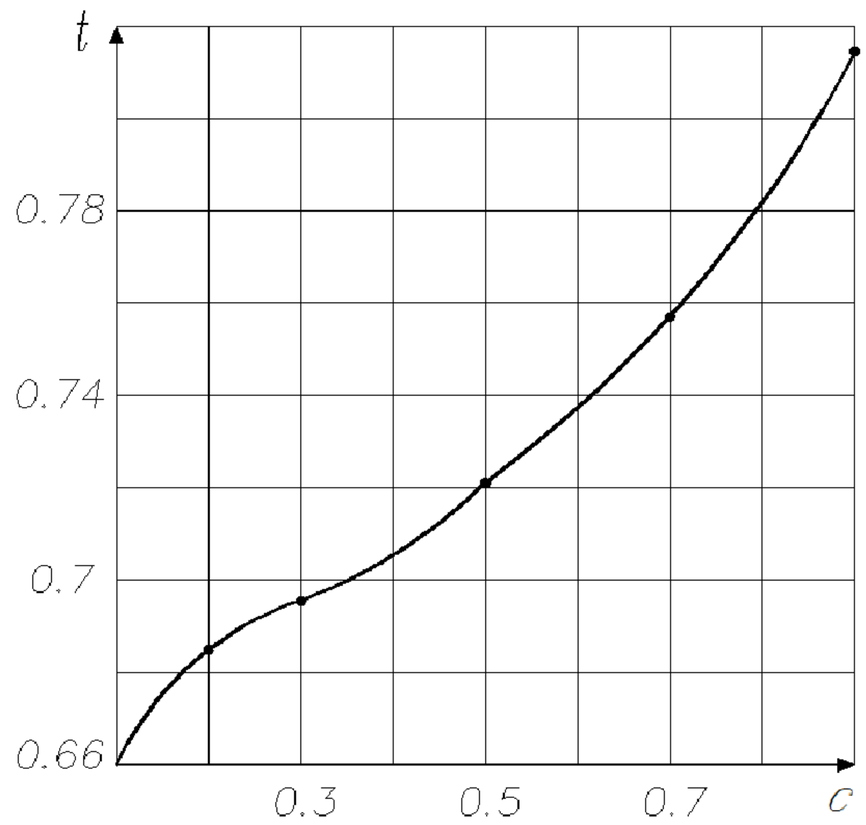



Рисунок 3.18 – График для определения параметра t.

После определения t находим КИН

$$K_I = \sqrt{2\pi a}\cdot\sigma_n = \sqrt{2\pi}\cdot 1{,}1R_{bt}\left[1-(1-c)^{1-t}\right]\sqrt{t\lambda h}. \qquad (3.42)$$

Если параметр напряженного состояния L, определенный по формуле (3.39) превысит предельное значение $L_m$, определенный по (3.37) для имеющейся трещины, то это означает, что действующий момент Mпревысил значение $M_m$. При этом напряжение у вершины трещины остается равным пределу прочности бетона $R_{bt}$, а сама длина трещины увеличится в зависимости от действующего момента. Действительная длина трещины должна определятся аналитически из системы (2.59) или по регрессионным зависимостям типа (2.70).

Согласно предыдущим соотношениям в этом случае $c=0{,}909$ и $t=0{,}808$ и формула для определения КИН примет вид

$$K_I = 0{,}914R_{bt}\sqrt{z_p}, \qquad (3.43)$$

где $z_p = h(1-\xi-z)$.

Проанализируем изменение КИН с ростом внешнего момента. Пусть в балке, рассмотренной выше, имеется начальная трещина $z_0 = 0{,}2$ ($l_0 = 6\,см$). Определим момент $M_m$, при котором напряжение у вершины трещины достигает предела прочности бетона. Из графика на рисунке 3.15 при $z=0{,}2$ определяем $L_m = 0{,}461$. Далее из формулы (3.37), определяем

$$M_m = L_m R_{bt} bh^2 = 0{,}461\cdot 1{,}6\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}15\cdot 0{,}3^2 = 9{,}96\ кНм$$

При расчетах момент не должен  превосходить этой величины.

Приведем алгоритм расчета.

1. Для заданного момента определяем параметр $L = M/R_{bt}bh^2 = M/21,6$.

2. По графику на рисунке 3.16 (кривая 2) определяем безразмерное напряжение у вершины трещины – *«c»*.

3. По графику на рисунке 3.17 (кривая 2) определяем безразмерную высоту растянутой зоны – λ. Если такой график отсутствует, то по формуле (3.38) определяется высота сжатой зоны $\xi$, а затем $\lambda = 1 - \xi - z_0$.

4. По графику на рисунке 3.18 определяем параметр t.

5. По формуле (3.42) определяем КИН.

Расчеты, проведенные по этому алгоритму, приведены в таблице 3.6

Таблица 3.6 – Изменение КИН от момента

| M | 2 | 4 | 6 | 8 | 9,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| L | 0,093 | 0,185 | 0,278 | 0,37 | 0,44 |
| *c* | 0,33 | 0,55 | 0,715 | 0,83 | 0,885 |
| *y* | 0,4 | 0,799 | 1,255 | 1,772 | 2,163 |
| $\xi$ | 0,485 | 0,477 | 0,467 | 0,458 | 0,452 |
| $\lambda$ | 0,314 | 0,323 | 0,333 | 0,342 | 0,348 |
| t | 0,7 | 0,73 | 0,76 | 0,786 | 0,8 |
| $K_I$ | 0,128 | 0,228 | 0,316 | 0,395 | 0,448 |

Здесь *M* в кНм, КИН в МН/м$^{3/2}$, остальные параметры безразмерны. Из таблицы видно, что с ростом момента КИН расчет, но нелинейно. Интенсивность роста меньше, чем при линейном расчете.

Проанализируем изменение КИН с ростом длины начальной трещины. Примем $M = 9,5\ кНм$, тогда $L = 0,44$ (табл. 3.6). При $z_0 = 0,1$ с использованием графика на рисунке 3.15 определяем

$$M_m = 0,418 \cdot 21,6 = 9,03\ кНм.$$

Действующий момент больше этого значения, следовательно начальная длина трещины увеличится. Длину трещины и высоту сжатой зоны определим из регрессионных зависимостей (2.70) и (2.71) при $m = 9,5/53,6 = 0,177$, где $M_p = 53,6\ кНм$ – разрушающий момент для балки. Из этих зависимостей имеем

$$L_m = 4,88\ см,\ x = 13,53\ см,\ z_p = h - l_m - x = 11,6\ см.$$

Теперь по формуле (3.43) определяем $K_I = 0,497\ МН/м^{3/2}$.

При $z_0 = 0,2$ и более $M < M_m$ и расчет ведем по следующему алгоритму.

1. Для параметра нагрузки $L = 0,44$ по графику на рисунке 3.16 или интерполированием значений таблицы 3.4 находим безразмерное напряжение у вершины трещины – «*c*».
2. По графику на рисунке 3.17 или интерполированием по таблице 3.5 определяем безразмерный параметр $\lambda$. Можно его найти и с использованием формулы (3.38).
3. По графику на рисунке 3.18 определяем параметр t.
4. По формуле (3.42) находим КИН.

Расчеты, проведенные по этому алгоритму, приведены в таблице 3.7.

Таблица 3.7 – Изменение КИН (МН/м$^{3/2}$) от длины трещины

| $z_0$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *c* | 0,909 | 0,885 | 0,836 | 0,728 | 0,513 | 0,057 |
| $\lambda$ | 0,387 | 0,348 | 0,268 | 0,184 | 0,099 | 0,0075 |
| t | - | 0,8 | 0,782 | 0,7605 | 0,7207 | 0,65 |
| $K_I$ | 0,497 | 0,448 | 0,36 | 0,242 | 0,117 | 0,003 |

Из таблицы видно, что с ростом длины начальной трещины уменьшается высота растянутой зоны и КИН, развитие трещины будет устойчивым. При этом высота сжатой зоны уменьшается, максимальное сжимающее напряжение, и растягивающее напряжение в арматуре растут. При КИН равном нулю произойдет разрушение балки за счет достижения предела текучести в арматуре или дробления бетона сжатой зоны.

Рассмотрим теперь изменение КИН при росте внешнего момента и отсутствии начальных трещин. С ростом момента растет длина трещины $l_m$, изменяется высота сжатой зоны *x* и уменьшается высота растянутой зоны $z_p$. Эти параметры найдем из ранее полученных регрессионных зависимостей (2.70) и (2.71). Для рассматриваемой балки их можно привести к виду

$$x = 21,574m^2 - 22,693m + 16,87(см); \quad l_m = 19,873 - 2,653/m(см); \quad z_p = h - l_m - x.$$

КИН определяется по формуле (3.43).

Результаты таких расчетов приведены в таблице 3.8.

Таблица 3.8 – Изменение КИН (МН/м$^{3/2}$) от безразмерного момента

| m | 0,15 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 13,95 | 13,19 | 12,0 | 11,25 | 10,92 | 11,02 | 11,56 | 12,52 |
| $l_m$ | 2,19 | 6,61 | 11,03 | 13,24 | 14,57 | 15,45 | 16,08 | 16,56 |
| $z_p$ | 13,86 | 10,2 | 7,0 | 5,5 | 4,51 | 3,53 | 2,36 | 0,92 |
| $K_I$ | 0,543 | 0,467 | 0,386 | 0,344 | 0,31 | 0,275 | 0,225 | 0,14 |

Из таблицы видно, что с ростом момента КИН уменьшается, как и при росте начальной трещины. При этом длина трещины сначала быстро растет, затем рост замедляется и перед разрушением прекращается. Это связано с тем, что развитие трещины ограничивается наличием минимальной зоны сжатия бетона. В предельном состоянии длина трещины охватывает всю возможную зону растяжения, и вся растягивающая нагрузка воспринимается арматурой. При этом КИН уменьшается до нуля, далее происходит разрушение балки. В нашем случае это происходит при $m = m_p = 0,85$.

При наличии начальных трещин, рассчитанную от момента длину трещины $l_m$, нужно сравнить с длиной имеющей трещины $l_0$, и расчет КИН вести по большей длине трещины. При $l_0 > l_m$ применяется алгоритм расчета по таблице 3.6.

### 3.5 Определение регрессионных зависимостей для коэффициента интенсивности напряжений

Как показали многочисленные расчеты, КИН в пластинах конечных размеров зависит от приложенного номинального напряжения (без учета трещины), длины трещины и отношения длины трещиныk размерам пластины.

Для пластины бесконечных размеров с центральной трещиной имеется формула для определения КИН. По аналогии с ней решение для пластины конечных размеров представим в виде

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}\, f(\gamma, \beta), \qquad (3.44)$$

где $a$ – половина длины трещины; $\gamma = l / h, \beta = l / b$;

$f(\gamma, \beta)$ – поправочная функция, учитывающая размеры пластины и трещины.

По аналогии для краевой трещины запишем

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l}\, f(\gamma, \beta). \qquad (3.45)$$

Итак имеем два варьируемых параметра ($\gamma, \beta$). Их будем менять в пределах от 0,1 до 0,8 с интервалом 0,1. При $\gamma, \beta$ меньших 0,1 следует применять формулы для бесконечных пластин или этот параметр положить равным нулю в выражениях (3.44) и (3.45). Значения $\gamma, \beta$ большие 0,8 нереальны из-за разрушения.

Для получения поправочных функций проведены полнофакторные машинные эксперименты, результаты которых приведены в таблицах 3.8 и 3.9.

Таблица 3.8 – Значения поправочной функции к КИН для пластины конечных размеров с центральной трещиной

| γ \ β | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 1.018 | 1.029 | 1.062 | 1.114 | 1.191 | 1.307 | 1.490 | 1.815 |
| 0.2 | 1.049 | 1.059 | 1.069 | 1.114 | 1.191 | 1.309 | 1.494 | 1.824 |
| 0.3 | 1.10 | 1.114 | 1.126 | 1.140 | 1.197 | 1.309 | 1.494 | 1.824 |
| 0.4 | 1.173 | 1.178 | 1.208 | 1.220 | 1.242 | 1.325 | 1.497 | 1.824 |
| 0.5 | 1.257 | 1.259 | 1.289 | 1.327 | 1.338 | 1.382 | 1.522 | 1.830 |
| 0.6 | 1.354 | 1.357 | 1.374 | 1.434 | 1.466 | 1.485 | 1.581 | 1.857 |
| 0.7 | 1.460 | 1.462 | 1.471 | 1.534 | 1.604 | 1.626 | 1.682 | 1.911 |
| 0.8 | 1.573 | 1.575 | 1.579 | 1.634 | 1.736 | 1.791 | 1.822 | 1.997 |

Таблица 3.9 – Значения поправочной функции к КИН для пластины конечных размеров с краевой трещиной

| γ \ β | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 1.232 | 1.3712 | 1.665 | 2.117 | 2.832 | 4.048 | 6.357 |
| 0.2 | 1.477 | 1.4890 | 1.692 | 2.117 | 2.837 | 4.050 | 6.361 |
| 0.3 | 1.797 | 1.7993 | 1.856 | 2.163 | 2.842 | 4.051 | 6.366 |
| 0.4 | 2.159 | 2.1600 | 2.169 | 2.333 | 2.887 | 4.053 | 6.367 |
| 0.5 | 2.548 | 2.5487 | 2.550 | 2.616 | 3.021 | 4.085 | 6.369 |
| 0.6 | 2.961 | 2.9614 | 2.962 | 2.982 | 3.240 | 4.166 | 6.371 |
| 0.7 | 3.395 | 3.3953 | 3.396 | 3.401 | 3.545 | 4.303 | 6.418 |

После обработки данных таблицы 3.8 программой ANETR получили следующие выражения для центральной трещины:

$$\mathrm{f}(\gamma,\beta)=\left[\frac{1}{1{,}0222-0{,}4899\cdot\gamma}+\frac{1}{0{,}8196-0{,}1330\cdot\beta}-1{,}2722\right]. \qquad (3.46)$$

Адекватность модели оценивается СКО=10,39 % и R=0,994. Эта формула справедлива для всего диапазона $\gamma$ и $\beta=\left(0.1,...,0.4\right]$. Для диапазона $\beta=(0.4,...,0.8)$ аналитическое выражение для поправочной функции имеет вид:

$$\mathrm{f}(\gamma,\beta)=\left[1{,}1653\cdot\gamma^{2}-0{,}4751\cdot\gamma+4{,}1179\cdot\beta^{2}-3{,}7561\cdot\beta+2{,}1196\right], \qquad (3.47)$$

СКО=25,27 %; R=0,966.

Аналогичным образом для пластины с краевой трещиной получаем

$$f(\gamma,\beta)=\left[\frac{1}{0{,}6965-0{,}5939\cdot\gamma}+\frac{1}{0{,}4748-0{,}1797\cdot\beta}-2{,}3326\right], \qquad (3.48)$$

СКО=22,93 % и R=0.971. Эта формула справедлива для всего диапазона $\gamma$ и $\beta=(0.1,...,0.4]$. Для диапазона $\beta=(0.4,...,0.7)$ аналитическое выражение для поправочной функции имеет вид:

$$f(\gamma,\beta)=\left[2{,}3776\cdot\gamma^{2}-1{,}0283\cdot\gamma+\frac{1}{0{,}7216-0{,}8\cdot\beta}-0{,}0608\right], \qquad (3.49)$$

СКО=13,3 %; R=0,990.

Для пластины конечных размеров с наклонной трещиной аналитические выражения представим в виде:

$$K_{I}=\sigma\sqrt{\pi a}\,f_{I}(\alpha,\beta,\gamma);\quad K_{II}=\sigma\sqrt{\pi a}\,f_{II}(\alpha,\beta,\gamma). \qquad (3.50)$$

В качестве варьируемых параметров добавился ещё угол наклона трещины, который будем варьировать в пределах от $10^{\circ}$ до $70^{\circ}$ на семи уровнях (через $10^{\circ}$). Таким образом, каждый из трех параметров варьируется на 7 уровнях, что требует проведения 343 опытов при полнофакторном эксперименте. Для сокращения опытов применим рациональное планирование эксперимента, описанное в первой главе. При этом потребуется 49 опытов. Матрица планирования эксперимента и его результаты приведены в таблицах 3.10 и 3.11.

Таблица 3.10 – Значения варьируемых параметров на различных уровнях

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ , рад | 0,174 | 0,349 | 0,524 | 0,698 | 0,873 | 1,047 | 1,222 |
| $\beta$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 |
| $\gamma$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 |

Таблица 3.11 – Матрица планирования и результаты эксперимента

| № | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $f_{I}$ | $f_{II}$ | № | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $f_{I}$ | $f_{II}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,174 | 0,1 | 0,2 | 1,022 | 0,141 | 29 | 0,873 | 0,1 | 0,6 | 0.528 | 0.702 |
| 2 | 0,174 | 0,2 | 0,3 | 1,09 | 0.161 | 30 | 0,873 | 0,2 | 0,7 | 0.541 | 0.828 |
| 3 | 0,174 | 0,3 | 0,4 | 1.181 | 0.173 | 31 | 0,873 | 0,3 | 0,1 | 0.402 | 0.542 |

Продолжение таблицы 3.11

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 0,174 | 0,4 | 0,5 | 1.30 | 0.179 | 32 | 0,873 | 0,4 | 0,2 | 0.410 | 0.553 |
| 5 | 0,174 | 0,5 | 0,6 | 1.432 | 0.216 | 33 | 0,873 | 0,5 | 0,3 | 0.421 | 0.595 |
| 6 | 0,174 | 0,6 | 0,7 | 1.599 | 0.271 | 34 | 0,873 | 0,6 | 0,4 | 0.492 | 0.608 |
| 7 | 0,174 | 0,7 | 0,1 | 1.451 | 0.152 | 35 | 0,873 | 0,7 | 0,5 | 0.542 | 0.642 |
| 8 | 0,349 | 0,1 | 0,3 | 0.986 | 0.284 | 36 | 1,047 | 0,1 | 0,7 | 0.297 | 0.790 |
| 9 | 0,349 | 0,2 | 0,4 | 1.057 | 0.301 | 37 | 1,047 | 0,2 | 0,1 | 0.215 | 0.463 |
| 10 | 0,349 | 0,3 | 0,5 | 1.154 | 0.308 | 38 | 1,047 | 0,3 | 0,2 | 0.241 | 0.515 |
| 11 | 0,349 | 0,4 | 0,6 | 1.274 | 0,350 | 39 | 1,047 | 0,4 | 0,3 | 0.263 | 0.540 |
| 12 | 0,349 | 0,5 | 0,7 | 1.426 | 0.372 | 40 | 1,047 | 0,5 | 0,4 | 0.271 | 0.620 |
| 13 | 0,349 | 0,6 | 0,1 | 1.174 | 0.291 | 41 | 1,047 | 0,6 | 0,5 | 0.290 | 0.676 |
| 14 | 0,349 | 0,7 | 0,2 | 1.305 | 0.313 | 42 | 1,047 | 0,7 | 0,6 | 0.304 | 0.779 |
| 15 | 0,524 | 0,1 | 0,4 | 0.847 | 0.475 | 43 | 1,222 | 0,1 | 0,1 | 0.101 | 0.291 |
| 16 | 0,524 | 0,2 | 0,5 | 0.916 | 0.477 | 44 | 1,222 | 0,2 | 0,2 | 0.142 | 0.316 |
| 17 | 0,524 | 0,3 | 0,6 | 1.031 | 0.503 | 45 | 1,222 | 0,3 | 0,3 | 0.173 | 0.328 |
| 18 | 0,524 | 0,4 | 0,7 | 1.248 | 0.515 | 46 | 1,222 | 0,4 | 0,4 | 0.205 | 0.345 |
| 19 | 0,524 | 0,5 | 0,1 | 0.880 | 0.443 | 47 | 1,222 | 0,5 | 0,5 | 0.236 | 0.374 |
| 20 | 0,524 | 0,6 | 0,2 | 0.962 | 0.455 | 48 | 1,222 | 0,6 | 0,6 | 0.279 | 0.413 |
| 21 | 0,524 | 0,7 | 0,3 | 1.071 | 0.471 | 49 | 1,222 | 0,7 | 0,7 | 0.308 | 0.453 |
| 22 | 0,698 | 0,1 | 0,5 | 0.740 | 0.620 | | | | | | |
| 23 | 0,698 | 0,2 | 0,6 | 0.801 | 0.685 | | | | | | |
| 24 | 0,698 | 0,3 | 0,7 | 0.895 | 0.748 | | | | | | |
| 25 | 0,698 | 0,4 | 0,1 | 0.718 | 0.508 | | | | | | |
| 26 | 0,698 | 0,5 | 0,2 | 0.781 | 0.520 | | | | | | |
| 27 | 0,698 | 0,6 | 0,3 | 0.795 | 0.551 | | | | | | |
| 28 | 0,698 | 0,7 | 0,4 | 0.863 | 0.593 | | | | | | |

В результате обработки результатов эксперимента с помощью программы ANETR получены следующие аналитические зависимости:

$$f_I = 1{,}716 - 1{,}186 \cdot \alpha + 0{,}239 \lg\beta + 1{,}2 \cdot \gamma^2 - 0{,}668 \cdot \gamma; \qquad (3.51)$$

СКО=19,8 %; R=0,979.

$$f_{II} = -0{,}15 + \alpha\left(1{,}72 - 0{,}72 \cdot \gamma + 2{,}45 \cdot \gamma^2\right) - \alpha^2\left(1{,}05 - 0{,}44 \cdot \gamma + 1{,}5 \cdot \gamma^2\right) + \\ + 0{,}06 \cdot \gamma - 0{,}199 \cdot \gamma^2 - 0{,}11 \cdot \beta + 0{,}218 \cdot \beta^2, \qquad (3.52)$$

СКО=31,85 %; R=0,944.

## 3.6 Выводы по III главе

1. Изложена методика автоматизированного расчета параметров механики разрушения с использованием результатов конечно–элементного моделирования.

2. С использованием ПК ANSYS решены плоские задачи механики разрушения для прямоугольных пластин конечных размеров с различным расположением трещин.

3. Получены регрессионные зависимости КИН от геометрических параметров трещины и объекта для прямоугольных пластин конечных размеров с различным расположением трещин.

4. Получено приближенное аналитическое решение задачи об определении КИН в изгибаемых железобетонных балках прямоугольного сечения в линейной и нелинейной постановке.

5. Полученные в главе результаты позволяют решать любые плоские задачи механики разрушения МКЭ с представлением результатов в аналитическом виде.

# 4 ОЦЕНКА ТРЕЩИНОСТОЙКОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

## 4.1 Критериальные соотношения механики разрушения

Различают хрупкое, вязкое и усталостное разрушение. Хрупким разрушениям подвержены трубопроводы, различные емкости, бетонные и железобетонные конструкции, элементы машин и металлических конструкций, эксплуатирующиеся в условиях низких температур. Распространение хрупких трещин происходит при небольших пластических деформациях и сравнительно небольшой затрате энергии. Идеально хрупкое (упругое) разрушение происходит без пластической деформации при напряжениях меньших предела текучести. Существует также квазихрупкое разрушение, которое сопровождается образованием небольшой пластической зоны перед вершиной трещины, когда остальной объем тела находится в состоянии упругой деформации. Оно происходит при напряжениях в нетто-сечении выше предела текучести, но меньше предела прочности.

Вязкому разрушению предшествуют значительные вязкие деформации, т.е. разрушение происходит при напряжениях намного выше предела текучести.

Усталостные разрушения могут возникать в мостах, в подкрановых балках, вращающихся деталях машин и других элементах конструкций, испытывающих переменные нагрузки. Этот вид разрушения в работе не рассматривается.

Критерии механики разрушения дают информацию о наступлении критического состояния тела, для которого определяются либо критические размеры трещины при известной нагрузке, либо несущая способность изделия при заданных размерах трещины. В механике разрушения применяются силовые, энергетические и деформационные критерии.

### 4.1.1 Однопараметрические критерии разрушения

Иногда условия разрушения можно выразить через какой-то один параметр. Силовой критерий выражается через коэффициент интенсивности напряжений (КИН), энергетический критерий выражается через J – интеграл, а деформационные критерии - через интенсивность деформаций $\varepsilon_i$ или раскрытие вершины трещины $\delta$. Выбор конкретного критерия зависит в первую очередь от вида разрушения материала.

**Коэффициент интенсивности напряжений.**

Этот параметр характеризует напряжение у вершины трещины при хрупком разрушении материала определяется. Согласно силовому критерию Ирвина самопроизвольное развитие трещины начинается при достижений КИН критического значения $K_C$, то есть условие разрушения имеет вид:

$$K_{max} = K_C, \qquad (4.1)$$

где $K_C$ - предельное значение КИН, определяемое экспериментально для каждого материала.

Этот критерий называется критерием квазихрупкого разрушения и может применяться при малых размерах пластической зоны у вершины трещины (маломасштабной текучести).

Для трещин отрыва максимальное значение КИН независимо от способа определения может быть записано в виде

$$K_{max} = K_I = \sigma \sqrt{\pi l_0}\, f(K), \qquad (4.2)$$

где $l_0$ - начальная длина трещины; $f(K)$ - поправочная функция, зависящая от вида трещины и отношение размеров трещины и объекта.

Заменяя $K_{max}$ на предельное значение $K_{IC}$, отсюда можно найти разрушающее напряжение, соответствующее имеющейся трещине или критическую длину трещины, соответствующее действующему напряжению

$$\sigma_P = K_{IC} / \sqrt{\pi l_0}\, f(K);\; l_k = K_{IC}^2 / \pi \sigma^2 f^2(K). \qquad (4.3)$$

Согласно ЛМР напряжение в вершине трещины стремится к бесконечности. На самом деле там образуются пластические деформации. Для учета этой зоны в формулу (4.2) вводят различные поправки. С этой целью Ирвином предложено увеличить начальную длину трещины на величину размера зоны пластичности или зоны разрушения (для упрочняющихся материалов) $r_f$ . В первом приближении эту поправку можно записать в виде

$$r_f = K_I^2 / 2\pi\sigma_f^2 = \sigma^2 l_0 f(K) / 2\sigma_f^2, \qquad (4.4)$$

где $\sigma_f = \sigma_T$ - для зоны пластичности и $\sigma_f = \sigma_в$ - для зоны разрушения. Тогда КИН будет определяться по формуле

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi (l_0 + r_f)}\, f(K). \qquad (4.5)$$

При $\sigma < 0{,}8\sigma_f$ эта зависимость подтверждается экспериментально. С погрешностью менее 5 % при $\sigma \le 0{,}45\sigma_f$ поправку Ирвина при хрупком разрушении можно не учитывать.

Из соотношений (4.5) и (4.1) можно найти уточненные параметры разрушения

$$\sigma_p = \sigma_f \left[ \sqrt{1 + 2\left(K_{IC} / \sigma_f f(K)\right)^2 / \pi l_0} - 1 \right]^{1/2}, \qquad (4.6)$$

$$l_k = \frac{K_{IC}^2}{\pi \sigma^2 f(K)\left(1 + \sigma^2 / 2\sigma_f^2\right)}.$$

Диаграммы критических напряжений для растянутой плоскости ( $f(K) = 1$), рассчитанные по формулам (4.3) и (4.6), приведены на рисунке 4.1. При расчетах принято $\sigma_f = 300$ МПа, $K_{IC} = 1000$ Н/мм$^{3/2}$. Из диаграммы видно, что разрушающее напряжение при учете зоны пластичности (кривая 2) меньше, чем при чисто хрупком разрушении (кривая 1). На этом же рисунке построен график функции $\varphi(l)$, равной отношению разрушающего напряжения с учетом и без учета поправки Ирвина. Через эту функцию можно получить известный параметр трещиностойкости [4]

$$l = \varphi K .$$

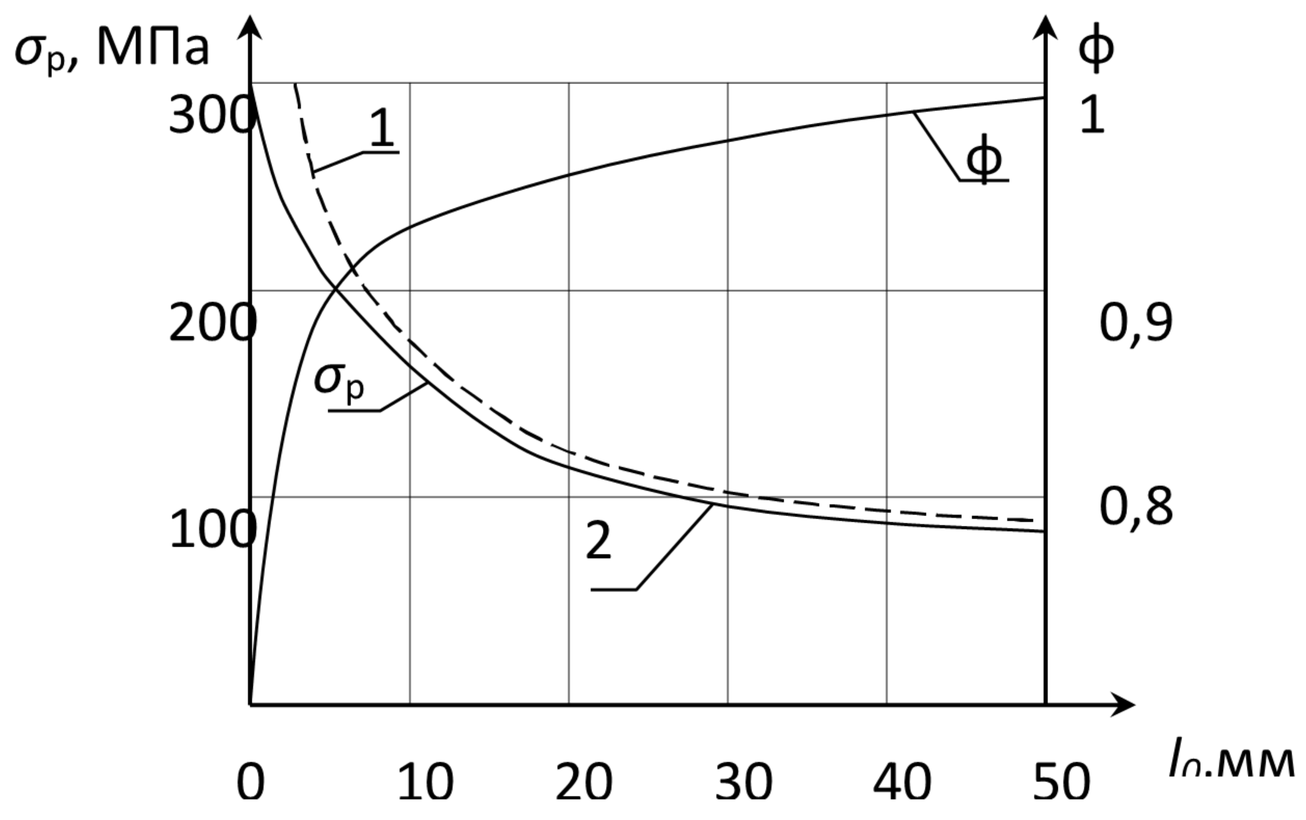



Рисунок 4.1 – Диаграммы критических напряжений

Если трещина испытывает не только отрыв, но и продольный и поперечный сдвиг, то в критериальных соотношениях для плоской деформации можно принять [12]

$$K^2 = \left(1 - \nu^2\right)\left(K_I^2 + K_{II}^2\right) + \left(1 + \nu\right)K_{III}^2 .$$

Для плоского напряженного состояния множитель $\left(1 - \nu^2\right)$ опускается.

Если известны вязкость разрушения для различных типов трещин, в общем случае нагружения критическое состояние трещины можно описать уравнением

$$\left(\frac{K_I}{K_{IC}}\right)^2+\left(\frac{K_{II}}{K_{IIC}}\right)^2+\left(\frac{K_{III}}{K_{IIIC}}\right)^2=1.$$

Этот критерий можно применять при небольших размерах пластической зоны у вершины трещины. Для определени размеров пластической зоны используют модель хрупкого разрушения Панасюка и Баренблатта или эквивалентную упругопластическую модель Дагдейла (рисунок 4.2).

Для определения КИН в данном случае воспользуемся формулой, предложенной Л.И. Седовым [1]

$$K=\frac{1}{\sqrt{\pi l}}\int_{-l}^{l}\sigma_{(x)}\sqrt{\frac{l+x}{l-x}}dx.$$

Функцию $\sigma_{(x)}$ в нашем случае можно записать в виде

$$\sigma_{(x)}=\sigma \quad \text{при} \quad 0\le|x|<l_0;\ \ \sigma_x=\sigma-\sigma_T \quad \text{при} \quad l_0\le|x|\le l.$$

Отсюда следует

$$K=\int_{-l}^{l}\sigma\sqrt{\frac{l+x}{l-x}}dx-\int_{l_0}^{l}\sigma_T\sqrt{\frac{l+x}{l-x}}dx-\int_{-l_0}^{-l}\sigma_T\sqrt{\frac{l+x}{l-x}}dx=0.$$

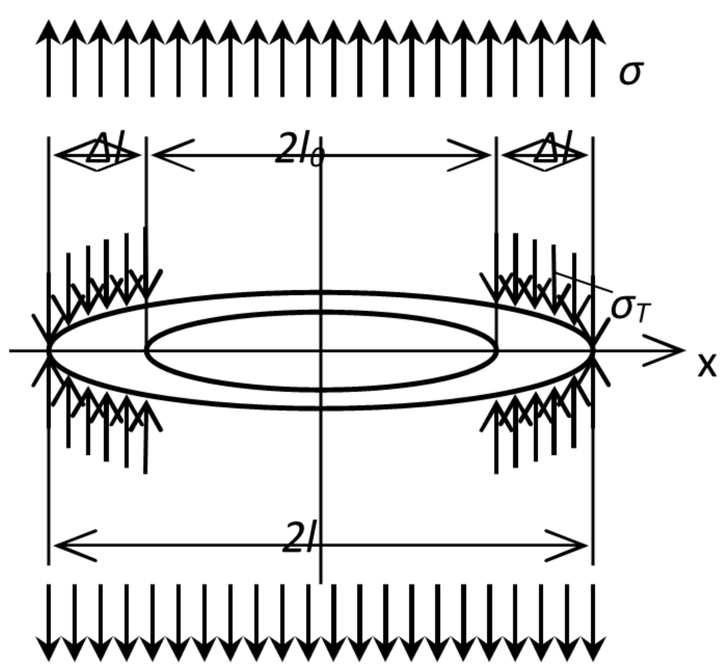



Рисунок 4.2 – Модель упругопластической трещины

Вычислив интегралы, приходим к соотношению

$$\sigma\pi l-2\sigma_T l\arccos(l_0/l)=0.$$

Отсюда находим размер зоны пластичности

$$\Delta l = l_0(\sec\frac{\pi\sigma}{2\sigma_т} - 1).$$

Если исходить из этого выражения, то поправку на пластичность можно не учитывать, если $\sigma \le 0{,}28\sigma_T$.

Приведенные выше оценки размера пластической зоны получены для одноосного напряженного состояния. В общем случае размер зоны пластичности должен определяться с применением условия пластичности Мизеса

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_T^2.$$

Анализ на основе этого условия показывает, размер пластической зоны для плоской деформации в $(1-2\nu)^{-1}$ раз меньше, чем при плоском напряженном состоянии.

Для учета реального напряженного состояния вводится коэффициент стеснения пластических деформаций $\chi=\sigma_1/\sigma_т$. В тонких пластинах возникает состояние плоской деформации, в толстых пластинах (балках, плитах) со сквозной трещиной на поверхностях возникает плоское напряженное состояние, а внутри состояние плоской деформации. Поэтому действительное значение $\chi$ при плоской деформации будет меньше. Многочисленные исследования и эксперименты дают основания принять [22]

$$\chi = \sqrt{2\sqrt{2}} \text{ или } \chi = \sqrt{3}.$$

Тогда поправка на пластичность по формуле (4.4) равна

$$r_f = K_I^2 / 2\pi(\chi\sigma_т)^2.$$

Итак при плоской деформации критерий ЛМР обычно приемлем. Для высокопрочных материалов этот критерий применим, если $E/\sigma_т < (200 \div 250)$. В низкопрочных материалах, обычно обладающих большой вязкостью, разрушающее напряжение выше предела текучести материала. В таких материалах критерий (4.1) применять не рекомендуется.

Зависимости, вытекающие из ЛМР, рекомендуется применять при $\sigma \le 0{,}66\sigma_f$. Для пластичных материалов для расчетов на прочность надо переходить к критериям нелинейной механики разрушения.

**Энергетический критерий.**

По этому критерию условие развития трещины имеет вид

$$G = R, \qquad (4.7)$$

где $G$ - скорость высвобождения упругой энергии; $R$ – сопротивление росту трещины, который зависит только от свойств материала.

Для хрупких материалов известна связь между энергией высвобождения и КИН

$$G = K_I^2 / E. \qquad (4.8)$$

Для всех материалов эту энергию можно определить через J - интеграл. $J$ – интеграл есть обобщенная функция выделения энергии за счет распространения трещины. Он применим как для упругих, так и для значительных пластических деформаций. $J$ – интеграл определяется выражением [1]

$$J = \int_{\Gamma} \left( w dy - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right), \qquad (4.9)$$

где $\Gamma$ – произвольный контур, охватывающий вершину трещины;

$\sigma_{ij}$ и $u_i$ - компоненты напряжений и перемещений на контуре $\Gamma$;

$n_j$ - компонента единичного вектора внешней нормали к элементу контура $ds$;

$w$ – плотность энергии деформаций.

$J$ – интеграл можно определить и перерасчетом КИН. При малых пластических деформациях

$$J = K^2 / E = \sigma^2 \pi l_0 f^2(K) / E. \qquad (4.10)$$

Найдем такую же связб при больших пластических деформациях. Пусть вершина выреза в теле имеет вид полукруга радиуса $r$. Путь интегрирования возьмем в виде полуокружности на контуре вершины трещины и, с учетом отсутствие сил на поверхности выреза из формулы (4.9), получим

$$J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} W_{(\theta)} r \cos\theta \, d\theta .$$

Приняв выражение для удельной работы деформации у контура вершины выреза в виде [22]

$$W_{(\theta)} = W_m \cos\theta ,$$

получаем

$$J = \frac{\pi}{2} r W_m = \frac{\pi}{2} r \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i \, d\varepsilon_i \ .$$

Аппроксимируя диаграмму деформирования выражением

$$\sigma = \sigma_T \left( \varepsilon / \varepsilon_T \right)^m = \sigma_* \varepsilon^m ,$$

получим

$$J = \frac{\pi}{2} r \sigma_* \varepsilon_i^{m+1} / (m+1) = \frac{\pi r}{2(m+1)} \sigma_i \varepsilon_i = \frac{\pi r}{2(m+1)} K_{ei} K_{\sigma i} \varepsilon \sigma \ ,$$

где $K_{ei}$, $K_{\sigma i}$ - коэффициенты концентрации интенсивности деформаций и напряжений.

Осуществляя далее предельный переход от выреза к трещине ($r \to 0$) и предполагая, что деформирование материала у вершины трещины происходит в пластической зоне, получим

$$J = \begin{cases} 2K^2 / (1+m) E, & \sigma < \sigma_T ; \\ 2K^2 \left( \sigma / \sigma_T \right)^{(1-m)/m} / (1+m) E, & \sigma > \sigma_T . \end{cases} \qquad (4.11)$$

Отсюда для упругого материала ($m = 1$) получаем формулу (4.10).

Экспериментально установлено, что разрушение материала происходит при одном и том же предельном значении $J_c$. Тогда условие разрушения примет вид

$$J_{(\sigma, l)} = J_c . \qquad (4.12)$$

Отсюда можно найти разрушающую нагрузку или критическую длину трещины. При малых размерах пластической зоны у вершины трещины с учетом (4.10) получим

$$\sigma_P = \sqrt{E J_c / \left( \pi l_0 f(K) \right)} ; \quad l_k = \sqrt{E J_c / \left( \pi \sigma^2 f(K) \right)} .$$

Для материалов с развитой пластической деформацией у вершины трещины с учетом (4.11) имеем

$$\sigma_P = \left[ \frac{J_c E (1+m)}{2\pi l_0 f^2(K)} \right]^{\frac{m}{m+1}} \sigma_T^{(1-m)/(1+m)} ; \quad l_k = \frac{J_c E \sigma_T^2 (1+m)}{2\pi f^2(K) \left( \sigma / \sigma_T \right)^{1+1/m}} .$$

Если J – интеграл определен МКЭ, то и здесь как и для КИН можно получить регрессионную зависимость для определенного вида трещин и нагружения

$$J_{(\sigma,l)} = \left(K^2 / E\right) f(\sigma, m), \qquad (4.13)$$

где $f(\sigma, m)$ - функция безразмерных параметров, описывающих свойства материала и уровень нагружения.

Из этого уравнения с учетом (4.12) также можно определить разрушающее напряжение или критическую длину трещины.

**Деформационный критерий**

Существенную информацию о характере перераспределений напряжений и деформаций в зоне трещины получают численными решениями упругопластических задач МКЭ и упругих решений.

При упругопластических деформациях максимальные значения деформации в вершине трещины растут быстрее, чем номинальные напряжения. При больших пластических деформациях даже численные решения задач механики разрушения представляют определенные трудности. В таких случаях для оценки прочности целесообразно применение приближенного анализа местных деформаций с использованием основных параметров ЛМР и решений Нейбера.

Введем в рассмотрение относительные напряжения и деформации

$$\bar{\sigma} = \sigma / \sigma_T, \; \bar{\varepsilon} = \varepsilon / \varepsilon_T$$

и диаграмму деформирования в упругопластической области аппроксимируем выражением

$$\bar{\sigma} = \bar{\varepsilon}^{-m}, \qquad (4.14)$$

где $m$ – экспериментально определяемая характеристика материала.

Согласно решению Нейбера [58] коэффициент концентраций деформаций в вершине трещины

$$K_e = \bar{\sigma}^{-q_k} \left( \frac{\bar{K}_I}{\sqrt{2\pi r}} \right)^p,$$

где $\bar{K}_I = K_I / \sigma_T$ - относительное значение КИН, определяемое по линейной механике разрушения;

$$p = \frac{2 - 0{,}5(1-m)(1-\bar{\sigma})}{m+1}; \; q_k = 1 \text{ при } \bar{\sigma} < 1, \; q_k = 2/(1+m) \text{ при } \bar{\sigma} \geq 1.$$

Тогда интенсивность местной деформации

$$\bar{\varepsilon}_i = K_e \bar{\varepsilon} = \bar{\sigma}^q \left( \frac{\bar{K}_I^2}{2\pi r} \right)^{p/2} \qquad (4.15)$$

где $q = 0$ при $\bar{\sigma} < 1$, $q = (1-m)/m(m+1)$ при $\bar{\sigma} \geq 1$.

Согласно деформационному критерию разрушение произойдет в том случае, когда интенсивность деформации в вершине трещины будет равна местной разрушающей деформации

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_c . \qquad (4.16)$$

Местная разрушающая деформация определяется по формуле [58]

$$\bar{\varepsilon}_c = \bar{\varepsilon}_к D_e / I , \qquad (4.17)$$

где $\bar{\varepsilon}_k = \bar{S}_k^{1/m}$ - местная разрушающая деформация для гладкого образца;

$\bar{S}_k$ - относительное истинное сопротивление при разрыве;

$D_e$ - коэффициент снижения предельных пластических деформаций;

$I$ – коэффициент повышения наибольшего главного напряжения.

Для сталей можно принять

$$\bar{S}_k = S_k / \sigma_T \approx \sigma_в (1 + 1{,}4\psi_k) / \sigma_T ,$$

где $\psi_k$ - относительное сужение при разрыве.

Коэффициенты $D_e$, $I$ зависят от вида напряженного состояния в зоне разрушения. Относительные главные напряжения обозначим так

$$\bar{\bar{\sigma}}_1 = 1 , \; \bar{\bar{\sigma}}_2 = \sigma_2 / \sigma_1 , \; \bar{\bar{\sigma}}_3 = \sigma_3 / \sigma_1 .$$

Для тел с трещинами можно принять $\bar{\bar{\sigma}}_2 = 0{,}8$ [58]. Величина $\bar{\bar{\sigma}}_3$ зависит от вида напряженного состояния:

$\bar{\bar{\sigma}}_3 = 0$ для ПНС; $\bar{\bar{\sigma}}_3 = \nu(\bar{\bar{\sigma}}_1 + \bar{\bar{\sigma}}_2) = 1{,}8\nu$ для плоской деформации (ПД).

В промежуточных случаях $\bar{\bar{\sigma}}_3$ берется из решения объемной задачи МКЭ. Это напряжение меняется по толщине пластины: на поверхности ($z$=0) $\bar{\bar{\sigma}}_3 = 0$; если толщина тела $t \geq 10$ мм, то в центральной зоне возникает ПД и $\bar{\bar{\sigma}}_3 = 1{,}8\nu$. Если толщина пластины меньше 10 мм, то $\bar{\bar{\sigma}}_3$ можно оценить так [58]:

$$\bar{\bar{\sigma}}_3 = 1{,}8\nu\sqrt{1-(1-z/5)^2}\ .$$

Далее искомые коэффициенты можно определить по формулам

$$I = 1/\bar{\bar{\sigma}}_i = \left(0{,}84 - 1{,}8\bar{\bar{\sigma}}_3 + \bar{\bar{\sigma}}_3^2\right)^{-1/2};$$

$$D_e = \bar{\bar{\sigma}}_i / 3\bar{\bar{\sigma}}_{cp} = \left(0{,}84 - 1{,}8\bar{\bar{\sigma}}_3 + \bar{\bar{\sigma}}_3^2\right)^{1/2} / \left(1{,}8 + \bar{\bar{\sigma}}_3\right).$$

Расчет по этим формулам дает $D_e = 0{,}61$, $I = 1{,}1$ для ПНС и $D_e = 0{,}209$, $I = 2{,}49$ для ПД.

Исходя из критерия (4.24) и уравнения (4.23) можно построить диаграмму разрушения.

$$\bar{\sigma}_p^q \left[\frac{\bar{\sigma}_p^2 I_0 f^2(K)}{2(I - I_0)}\right] = \bar{\varepsilon}_c .$$

Отсюда находим

$$I / I_0 = 1 + 0{,}5 f^2(K)(\bar{\sigma}_p^{q+p} / \bar{\varepsilon}_c)^{2/p}. \qquad (4.18)$$

В это трансцендентное уравнение разрушающая нагрузка входит и в показатель степени $p$.

На рисунке 4.3 приведена диаграмма разрушения, рассчитанная по формулам (4.18). При расчетах принято $f(K) = 1$, $\bar{\varepsilon}_c = 5$, $m = 0{,}25$.

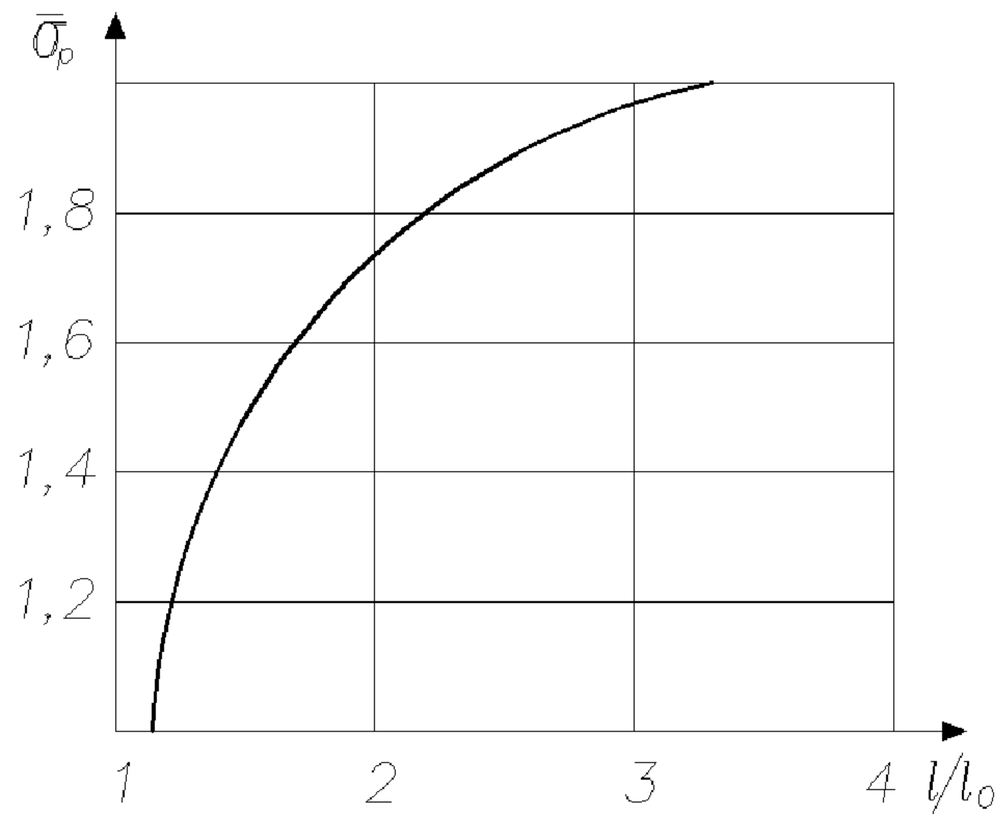



Рисунок 4.3 – Диаграмма разрушения упругопластического материала

4.1.2 Двухпараметрические критерии разрушения

Каждый из вышеупомянутых критериев ограничен определенной областью применения, которая зависит от механического состояния материала. Состояние материала (хрупкое, вязкое, смешанное) зависит от напряженного состояния в опасной точке. При смешанном механическом состоянии материала необходимо строить двухпараметрические критерии разрушения. При этом области применения различных критериев оказываются объединенными в единую область.

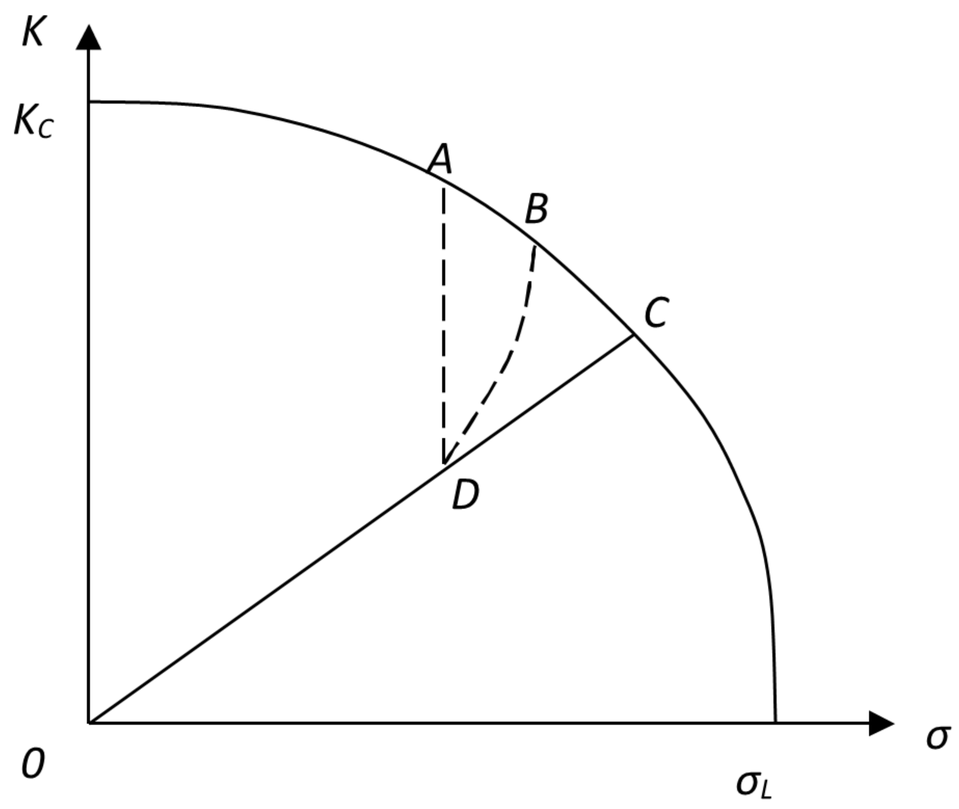



Рисунок 4.4 – Диаграмма предельного состояния

В связи с изменением напряженного состояния материал переходит от одного механического состояния к другому. При хрупком разрушении тела с трещиной предельное состояние наступает при достижении КИН своей предельной величины $K_{IC}$. Вязкое состояние становится предельным по достижении номинальным напряжением σ предельного значения $\sigma_f$, определяемого наступлением пластического течения по всему рассматриваемому сечению (или временного сопротивления $\sigma_в$) или при достижении локальной деформацией своего предельного значения $\varepsilon_c$. В промежуточных случаях наблюдается смешанное разрушение, определяемое критическим сочетанием параметров $K_*$, $\sigma_*$, каждый из которых меньше предельных значений $K_C$, $\sigma_L$. Смешанное состояние можно отразить на одной диаграмме, отложив по оси абсцисс действующее напряжение, а по оси ординат - КИН. При этом получим совмещение двух критериев, а полученная кривая (рисунок 4.4) соответствует предельному состоянию.

Для рассматриваемой трещины предельное состояние может наступить по различным причинам. Если длина трещины остается неизменной, то рост КИН по лучу ОС происходит за счет роста напряжений. Если предельное состояние наступает за счет медленного докритического роста трещины, начинающегося с точки D, то дальнейший рост КИН зависит от вида напряженного состояния в этой точке. Если имеет место плоская деформация, то рост КИН может происходить только за счет роста длины трещины. При этом напряжение остается постоянным и разрушение произойдет в точке А. Если имеет место плоское напряженное состояние, то рост КИН происходит как за счет роста напряжений, так и за счет роста длины трещины. Тогда КИН меняется по кривой DB.

**Двухпараметрический критерий на основе КИН.**

Экспериментально построим предельную кривую зависимости КИН от длины трещины. Для этого для каждого образца с фиксированной длиной трещины надо экспериментально найти разрушающее напряжение $\sigma_p$. Используя это напряжение, по формуле для КИН можно найти предельное значение КИН $K_*$, соответствующее фиксированной длине трещины. Повторяя опыты для различных длин трещин, можно построить график зависимости $K_*$ от l, который будет представлять собой предел трещиностойкости материала $l_c$

$$l_c = K_* = \sigma_p \sqrt{\pi l}\ . \qquad (4.19)$$

Предел трещиностойкости можно оценить и теоретически. Для растянутой плоскости с одиночной трещиной с учетом поправки на рост трещины $r_T$ диаграмму разрушения можно описать так

$$\sigma_p = \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi (l + r_T)}}.$$

Размер зоны разрушения представим в виде [85]

$$r_T = \alpha \sigma_p^{q-2},$$

где q – эмпирический коэффициент.

Коэффициент $\alpha$ найдем из условия $\sigma_p = \sigma_в$ при l =0:

$$\alpha = \frac{K_{IC}^2}{\pi \sigma_в^q}.$$

С учетом этого диаграмма разрушения примет вид

$$\sigma_p^2 \pi l + K_{IC}^2 \left(\frac{\sigma_p}{\sigma_в}\right)^q = K_{IC}^2.$$

Так как $l_c = K$ при $\sigma = \sigma_p$, то $l_c^2 = \sigma_p^2 \pi l$. Отсюда получаем аппроксимацию трещиностойкости

$$l_c = K_{IC} \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma_p}{\sigma_в}\right)^q} \qquad (4.20)$$

Показатель степени q подбирается из условия совпадения экспериментальных значений $l_c$ с аппроксимацией (4.20). По некоторым оценкам q=2 – 5; по другим данным [85] q=1/m, где m – показатель упрочнения в степенной зависимости диаграммы деформирования.

Выражение (4.20) может быть записано в другом виде

$$\left(\frac{\sigma_p}{\sigma_в}\right)^q + \left(\frac{l_c}{K_{1C}}\right)^2 = 1. \qquad (4.21)$$

Каждое слагаемое в этом уравнений описывает вклад различных видов разрушения в общий процесс разрушения.

С учетом критерия (4.21), условие разрушения можно переписать так:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_в}\right)^q + \left(\frac{K}{K_{1C}}\right)^2 = 1, \qquad (4.22)$$

где $\sigma_1$ – главное напряжение у вершины трещины;

$K$ – КИН для исходной длины трещины.

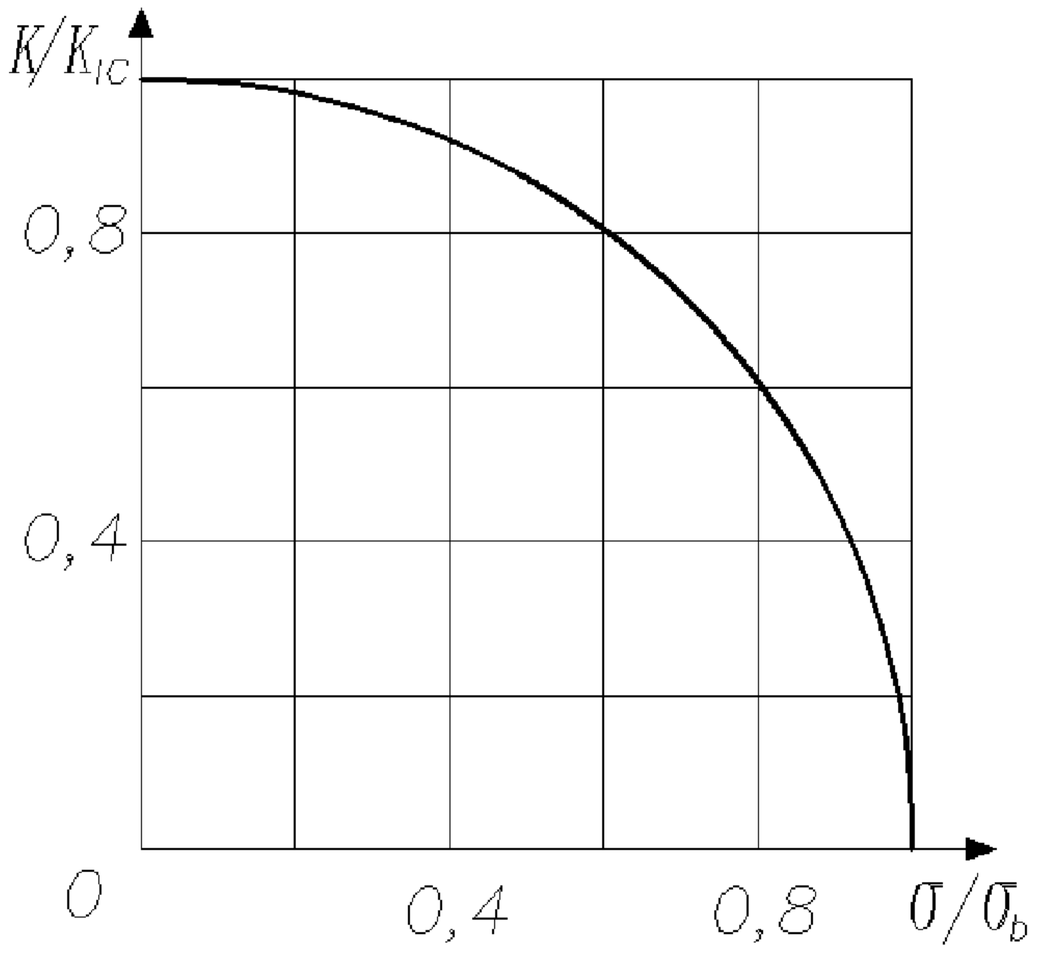



Рисунок 4.5 – Диаграмма предельных состояний

В работе [79], исходя из условия пропорциональности раскрытия в вершине трещины приложенному напряжению, получено аналогичное выражение, в котором q=2. График этой предельной кривой показан на рисунке 4.5

Для оценки прочности детали по диаграмме разрушения надо по действующему напряжению и исходной длине трещины найти параметры $\sigma/\sigma_в$

и $K/K_{1C}$. По этим параметрам на диаграмму наносится рабочая точка. Если точка окажется внутри диаграммы, то разрушение не произойдет. Чем ближе рабочая точка к предельной кривой, тем меньше коэффициент запаса по трещиностойкости.

Из условия (4.22) можно определить номинальное разрушающее напряжение при известной длине трещины или критическую длину трещины $l_k$ при известных действующих напряжениях. Для этого достаточно положить

$$\sigma_1 = \sigma\,,\ K = \sigma\sqrt{\pi l}\ f(K)\,,$$

где $f(K)$ - поправочная функция к КИН, зависящая от вида трещины и соотношение размеров трещины и объекта.
Тогда критическая длина трещины определяется так:

$$l_k = \frac{K_{1C}^2\left(1-(\sigma/\sigma_в)^q\right)}{\pi\sigma^2 f^2(K)},$$

а разрушающие напряжения находятся как корни следующего уравнения:

$$\left(\frac{\sigma_p}{\sigma_в}\right)^q + \left(\frac{\sigma_p f(K)\sqrt{\pi l}}{K_{1C}}\right)^2 = 1\,. \qquad (4.23)$$

Если у вершины трещины возникают все три вида деформирования, то в критериальных соотношениях КИН выражается через соответствующие коэффициенты так:

$$K^2 = \left(K_I^2 + K_{II}^2\right)\left(1-\nu^2\right) + (1+\nu)K_{III}^2\,. \qquad (4.24)$$

Если известны вязкости разрушения для различных видов деформирования, то критериальные соотношения можно представить в следующем виде:

$$\left(\frac{K_I}{K_{1C}}\right)^2 + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIC}}\right)^2 + \left(\frac{K_{III}}{K_{IIIC}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_в}\right)^q = 1\,. \qquad (4.25)$$

**Двухпараметрический критерий в терминах J –интеграла.**

Вновь рассмотрим тело с вырезом, растянутое внешними усилиями. При аппроксимации диаграммы деформирования выражением

$$\sigma = \sigma_T\left(\varepsilon/\varepsilon_T\right)^m = \sigma_*\varepsilon^m, \qquad (4.26)$$

для него выше получено выражение для J – интеграла:

$$J = \frac{\pi \sigma_* r \varepsilon^{m+1}}{2(m+1)}. \qquad (4.27)$$

Кстати, это соотношение совпадает с решением Ф. Макклинтока [214].

Для сплошного тела предельное состояние можно записать в виде равенства номинальной $\varepsilon_н$ и предельной номинальной деформации $\varepsilon_f$. Для тела с вырезом из концепции повреждаемости Л.М. Качанова [58] предельное состояние в точке у вершины трещины определяется линейным суммированием повреждений от номинального и локального повреждений

$$\frac{\varepsilon_н}{\varepsilon_f} + \frac{\varepsilon - \varepsilon_н}{\varepsilon_c} = 1,$$

где $\varepsilon_c$ - локальная предельная деформация. Определим отсюда $\varepsilon$ и подставим его в (4.27). Тогда имеем

$$J = J_c\left(1 - \varepsilon_н / \varepsilon_f + \varepsilon_н / \varepsilon_c\right)^{m+1},$$

где предельное значение J – интеграла

$$J_c = \frac{\pi \sigma_* r \varepsilon_c^{m+1}}{2(m+1)}.$$

Учитывая соотношение (4.26), можно записать

$$J = J_c\left(1 + \left(\sigma_н / \sigma_f\right)^{1/m} + \left(\sigma_н / \sigma_c\right)^{1/m}\right)^{m+1}.$$

Примем в качестве $\sigma_f$ предел прочности $\sigma_в$, в качестве предельного локального напряжения $\sigma_c$ - истинное сопротивление разрыву $S_k$, а за номинальное напряжение – наибольшее главное напряжение $\sigma_1$. Тогда последнее соотношение примет вид

$$J = J_c\left(1 - \left(\sigma_1 / \sigma_в\right)^{1/m} + \left(\sigma_1 / S_k\right)^{1/m}\right)^{m+1}. \qquad (4.28)$$

В предельном случае, когда $r \to 0$, вырез превращается в прямолинейную трещину. Для тела с трещиной выражение (4.28) будет иметь вид

$$\left(J / J_c\right)^{1/(m+1)} + \left(\sigma_1 / \sigma_в\right)^{1/m} - \left(\sigma_1 / S_k\right)^{1/m} = 1. \qquad (4.29)$$

Для многих конструкционных материалов характеристики материала равны $0 \le m \le 0{,}3$ и $S_k / \sigma_в \approx 2$. Тогда последнее слагаемое в (4.29) будет мало и пренебрегая им, можно записать

$$\left(J / J_c\right)^{1/(m+1)} + \left(\sigma_1 / \sigma_в\right)^{1/m} = 1. \qquad (4.30)$$

Учитывая, что $J$ пропорционален $K^2$, критерий (4.29) перепишем так:

$$\left(K_* / K_{c*}\right)^{2/(m+1)} + \left(\sigma_1 / \sigma_в\right)^{1/m} - \left(\sigma_1 / S_k\right)^{1/m} = 1, \qquad (4.31)$$

где $K_*$ - КИН, соответствующий разрушающему напряжению.

**Двухпараметрический деформационный критерий**.

Рассмотрим трехмерное упругопластическое тело, ослабленное трещиной отрыва. Определение НДС такого тела даже численными методами связаны с большими трудностями. Поэтому оценку прочности таких тел целесообразно вести приближенным методом с использованием решений Нейбера.

Для тела без трещины мера повреждения

$$П_c = \varepsilon_н / \varepsilon_в = \left(\sigma_н / \sigma_в\right)^{1/m},$$

где $\sigma_н$ - номинальное напряжение.

По аналогии с КИН при хрупком разрушении введем понятие коэффициента интенсивности деформации (КИД) - $K_{Ie}$ [57]. Формулу (4.15) перепишем в виде

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\overline{K}_{Ie}}{\left(2\pi r\right)^{p/2}}, \quad \overline{K}_{Ie} = \overline{K}_I^{\,p}\,\bar{\sigma}^{q}. \qquad (4.32)$$

При хрупком разрушении (m=1) q=0, p=1 и $\overline{K}_{Ie} = \overline{K}_I$.

При наличии трещины мера повреждения

$$П_T = \bar{\varepsilon} / \bar{\varepsilon}_c = \overline{K}_{Ie} / \overline{K}_{Iec},$$

где $\overline{K}_{Iec}$ - предельное значение КИД, определяемого по результатам испытания образцов с начальной трещиной $l_0$. Значение этого параметра можно оценить и по формуле (4.32). Тогда

$$П_T = \left(\overline{K}_I / \overline{K}_{Ic}\right)^p \left(\bar{\sigma} / \bar{\sigma}_m\right)^q,$$

где $\overline{\sigma}_m$ - максимальное значение номинального разрушающего напряжения, определяемое по формуле [214]

$$\overline{\sigma}_m = [\sqrt{2}\overline{\varepsilon}_c^{1/p} / f(K)]^{p/(p+q)}.$$

По линейной теории суммирования повреждений критерий разрушения примет вид

$$\Pi_c + \Pi_T = \left(\frac{\overline{\sigma}_1}{\overline{\sigma}_в}\right)^{1/m} + \left(\frac{\overline{K}_I}{\overline{K}_{Ic}}\right)^p \left(\frac{\overline{\sigma}_1}{\overline{\sigma}_m}\right)^q = 1. \qquad (4.33)$$

Большим достоинством этого критерия является то, что несмотря на большие упругопластические деформации оценку прочности можно производить по параметру линейной механики разрушения.

Из формулы (4.33) можно определить разрушающее напряжение при известной длине трещины. После алгебраических преобразований ее можно записать так:

$$\left(\frac{\overline{\sigma}_p}{\overline{\sigma}_в}\right)^{1/m} + [f(K)]^{(p+pq)/(p+q)} \frac{\left(\sqrt{\pi l_0} / \overline{K}_{Ic}\right)^p \overline{\sigma}_p^{p+q}}{\left(2^{p/2}\overline{\varepsilon}_c\right)^{q/(p+q)}} = 1. \qquad (4.34)$$

## 4.2 Определение предельных значений параметров механики разрушения

Анализ условий разрушения тел с трещинами показывает, что для оценки трещиностойкости нужны для материалов предельные значения КИН $K_{IC}$ и предельные значения J - интеграла $J_{IC}$. В отличие от критериев прочности и пластичности критерии механики разрушения учитывают локальные свойства среды у вершины трещины при определенном виде напряженного состояния, а потому эти критерии являются фундаментальными характеристиками сопротивления среды разрушению. В настоящее время накоплены значительные экспериментальные данные по их величинам [12, 65, 91, 215], существуют общепринятые стандарты и методики [7, 22, 90].

Способность материала сопротивляться развитию трещины называют трещиностойкостью. Ее полной характеристикой является предельное значение КИН ($K_c$). Так как различным типам трещин соответствуют разные напряженные состояния, то разными будут для них и вязкости разрушения: $K_{IC}$, $K_{IIC}$, $K_{IIIC}$. Среди них наименьшее значение имеет $K_{IC}$, которая изучена экспериментально более подробно.

В настоящее время можно выделить условно три группы методов определения $K_{IC}$:

- методы, основанные на корреляции трещиностойкости с другими параметрами, измеряемыми более простыми приемами [91];

- методы измерения необратимой работы по площади петли гистерезиса;

- методы, основанные на решении конкретных задач механики разрушения.

Наиболее широкое распространение получили методы третьей группы, при которых размеры образца и способ нагружения соответствует какому – либо конкретному теоретическому решению задачи механики разрушения. На этом методе основано руководство Американского общества испытания материалов для определения $K_{IC}$ - ASTM – E399 [22, 8]. Испытания проводят в условиях плоской деформации. При этом получают нижний предел $K_{IC}$ при статическом нагружении. Стандартные схемы и образцы для таких испытаний приведены на рисунке 4.6.

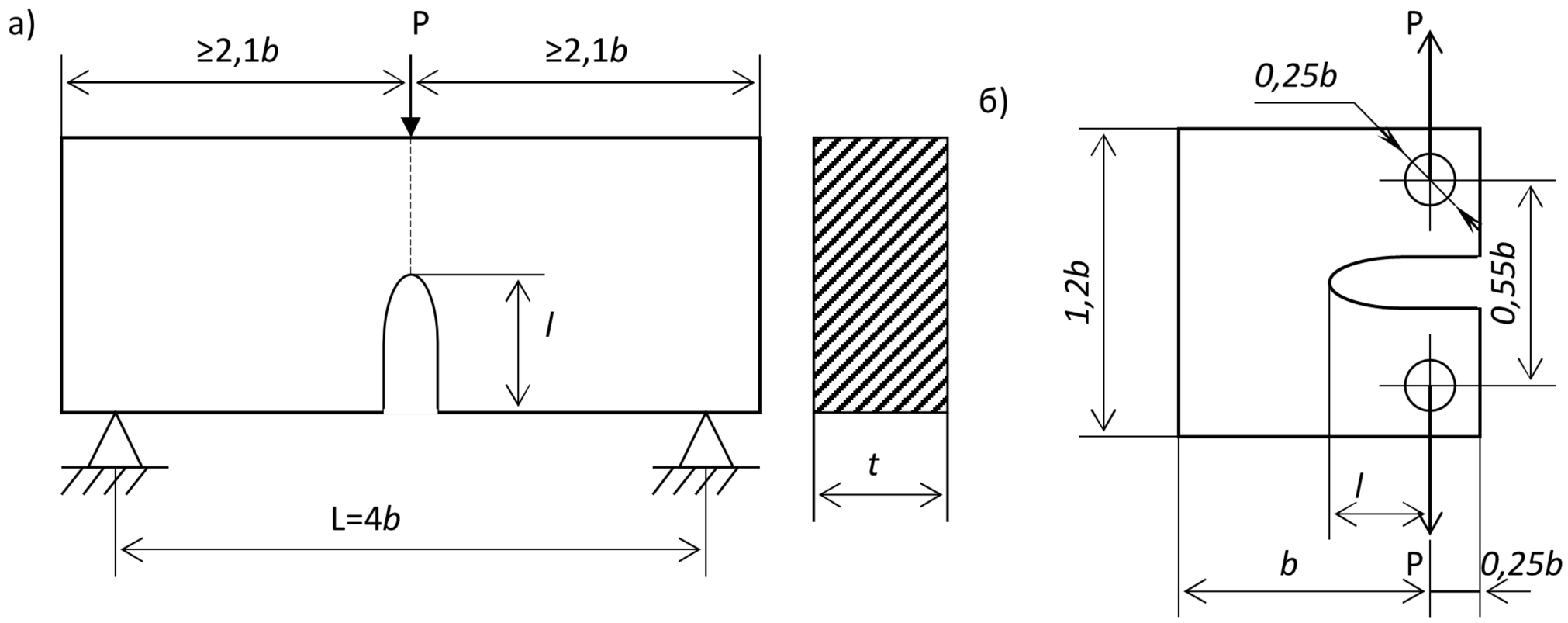



Рисунок 4.6 – Схемы испытаний на трехточечный изгиб и внецентренное растяжение

При испытаниях автоматически записывают диаграмму нагрузка-перемещение. После определения максимальной силы $P_Q$ КИН вычисляется по формулам:

испытания на трехточечный изгиб

$$K_Q = \frac{P_Q L}{t b^{3/2}} f(\lambda),\ (\lambda = l/b) \qquad (4.35)$$

$$f(\lambda) = \sqrt{\lambda}\left(2{,}9 - 4{,}6\lambda + 21{,}8\lambda^2 - 37{,}6\lambda^3 + 38{,}7\lambda^4\right);$$

испытания на внецентренное растяжение

$$K_Q = \frac{P_Q}{t\sqrt{b}} f(\lambda), \qquad (4.36)$$

$$f(\lambda) = \sqrt{\lambda}\left(29{,}6 - 185{,}5\lambda + 655{,}7\lambda^2 - 1017\lambda^3 + 638{,}9\lambda^4\right).$$

Если полученный результат удовлетворяет неравенству

$$t,l \geq 2{,}5\left(K_Q / \sigma_T\right)^2, \qquad (4.37)$$

то принимается $K_{IC}$ равно $K_Q$. Если (4.37) не удовлетворяется, то толщину образца увеличивают в 1,5 раза и испытания повторяются вновь.

Такие методики испытаний существуют во многих странах.

Часто в образце инициируется трещина и способ нагружения, соответствующие какому – либо конкретному теоретическому решению задачи механики разрушения. В ходе эксперимента фиксируется критическая нагрузка и соответствующая ей критическая длина трещины. Измерение длины трещины в процессе испытаний производится с помощью датчиков, регистрирующих положение конца трещины на основе измерения вихревых токов, киносъемки, а также косвенно путем измерения изменения электросопротивления [216]. По замеренным данным с помощью теоретического решения вычисляется предельное значение КИН, например, согласно (4.2)

$$K_{IC} = \sigma_c \sqrt{\pi l_k}\, f(K).$$

Если в ходе испытаний трудно зафиксировать критическую длину трещины, то применяют метод измерения податливостей [7]. С этой целью строят диаграммы зависимостей нагрузки P от перемещения точки приложения силы при различных $\lambda = l / b$

$$P = f(U) = U / \alpha,$$

где $\alpha$ - податливость образца, экспериментально определяемая в зависимости от длины трещины.

Так как для каждого $\lambda$ $\alpha = \text{const}$, то отсюда легко можно построить зависимость

$$\alpha = f_2(\lambda).$$

Далее графическим или численным дифференцированием получают зависимость

$$d\alpha / d\lambda = f_3(\lambda).$$

Из закона сохранения энергии можно записать связь этой производной с энергией распространения трещины

$$G = \frac{P^2}{2t} \cdot \frac{d\alpha}{dl} = \frac{P^2}{2tb} f_3(\lambda).$$

Теперь по формуле (4.8) находим КИН

$$K_I = \sqrt{GE/\left(1-\nu^2\right)} = \frac{P}{t\sqrt{b}} \sqrt{0,5Etf_3(\lambda)/(1-\nu^2)}.$$

Эти расчеты повторяют при различных $\lambda$ и зависимость КИН от $\lambda$ представляют в аналитическом виде, например,

$$K_I = Pf(\lambda)/t\sqrt{b}.$$

Для определения вязкости разрушения теперь достаточно зафиксировать разрушающую нагрузку при фиксированном $\lambda$ и воспользоваться соотношением

$$K_{IC} = P_c f(\lambda)/t\sqrt{b}. \qquad (4.38)$$

Функцию $f(\lambda)$ можно найти аналитически или численно. Для стандартных образцов вид этой функции имеется в специальной литературе. Так для образца с боковой трещиной формула (4.38) принимает вид [57]

$$K_{IC} = \frac{P_c}{tb}\sqrt{l}\left(1,99 - 0,41\lambda + 18,7\lambda^2 - 38,48\lambda^3 + 53,85\lambda^4\right).$$

Вышеизложенные эксперименты довольно сложны и дорогостоящие. В связи с этим предпринимаются попытки связать параметры трещиностойкости с результатами стандартных механических испытаний. Наиболее полный обзор работ в этом направлении выполнен британским Институтом сварки [217]. Из него следует, что особенно тесная связь существует между параметрами трещиностойкости и результатами испытаний на ударную вязкость образцов Шарпи. В работе [91] приведены следующие корреляционные зависимости

$$K_{IC} = \sqrt{2kE \cdot KCV/\left(1-\nu^2\right)}, \qquad (4.39)$$

где KCV – ударная вязкость; k – безразмерный коэффициент. Коэффициент k зависит от ряда факторов и изменяется в диапазоне от 0,05 до 0,1 и мало зависит от вида разрушения.

Общепринятой методики испытания материалов на вязкость при плоском напряженном состоянии (ПНС) не существует. Однако, некоторые элементы конструкции изготавливают тонкостенными и определение вязкости разрушения при ПНС $K_{1C}$, имеет для них практическое значение. Испытания показали, что $K_{1C}$ не является константой материала, а зависит от размеров образца. С увеличением ширины панели $K_{1C}$ постепенно увеличивается, принимая постоянное значение, когда этот размер превышает определенное значение. Это значение $K_{1C}$ принимается за действительное значение для материала при данной толщине. При увеличении толщины пластины $K_{1C}$ постепенно уменьшается, достигая значения $K_{IC}$ (для ПД).

Для испытаний при ПНС необходимы большие образцы. Для этой цели в основном используются панели с центральной трещиной. Медленный рост трещины записывают на киносъемку. Выборочные требования к испытаниям при ПНС имеют вид

$$\sigma_c < 2\sigma_T / 3, \; l < b/3 .$$

Для экспериментальной механики разрушения важное значение имеет определение величины $J_{IC}$, которая характеризует упругопластическую вязкость разрушения.

В настоящее время существуют различные методы испытаний на $J_{IC}$. Они делятся на прямые и косвенные. К прямым методам относятся метод разности потенциалов и метод акустической эмиссии. Они основаны на применении метода неразрушающего контроля. Преимуществом этих методов является возможность получения результата путем испытания одного образца. Недостатком этих методов является необходимость использования сложного оборудования; кроме того, имеются материалы, для которых трудно разделить измеряемую величину, обусловленную текучестью и стартом трещины.

К косвенным методам определения $J_{IC}$ относятся: метод Бигли и Лэндеса (проект ASTM – E24, США), метод Гриффиса (предложения: BSI, 1978; BSI COD, Англия), метод податливости, метод зоны вытягивания, испытания по ГОСТ 25.506 – 85 [90]. При проведении испытаний по этим методам необходимо использовать несколько образцов с различными уровнями нагружения. Исследуя изломы в окрестностях вершины усталостной трещины, определяют зависимости $J$ – интеграла от ширины зоны вытягивания SZW и прироста длины трещины $\Delta l$. С помощью соответствующих графических построений определяется величина $J_{IC}$.

Кроме экспериментальных методов в последнее время для определения $J_{IC}$ предложены ряд расчетно–экспериментальных методов. В основе такого метода, предложенного в работе [88] лежит экспериментальная диаграмма $P - \Delta l$, полученная для одного образца, и концепция постоянства $T^*$ - интеграла после старта трещины, то есть концепция однозначного соответствия диаграммы $P - \Delta l$ условию $T^*(\Delta l) = \text{const} = J_{IC}$.

В работе [218] предлагается следующий расчетно-экспериментальный метод определения $J_{IC}$. Для образца экспериментально определяется разрушающее напряжение $\sigma_p$. Для этого образца в условиях эксперимента расчетом по МКЭ строят зависимость J – интеграла от приложенного напряжения $\sigma$. Далее из графика при $\sigma = \sigma_p$ можно найти значение $J_{IC}$, соответствующее разрушающему напряжению.

Рассмотрим далее особенности определения предельных критериальных параметров механики разрушения для бетона. Они связаны с тем, что бетон является многокомпонентным неоднородным и нелинейно упругим материалом.

Для бетона основным параметром механики разрушения является КИН. В отличие от металла методы определения $K_{IC}$ для бетона до сих пор не стандартизованы. Это является одной из причин расхождения между экспериментальными данными различных авторов. Основным видом определения предельного значения КИН является испытание на трех точечный изгиб, который описан выше. Применяется также схема испытания "двойная консоль" (рис. 4.9).

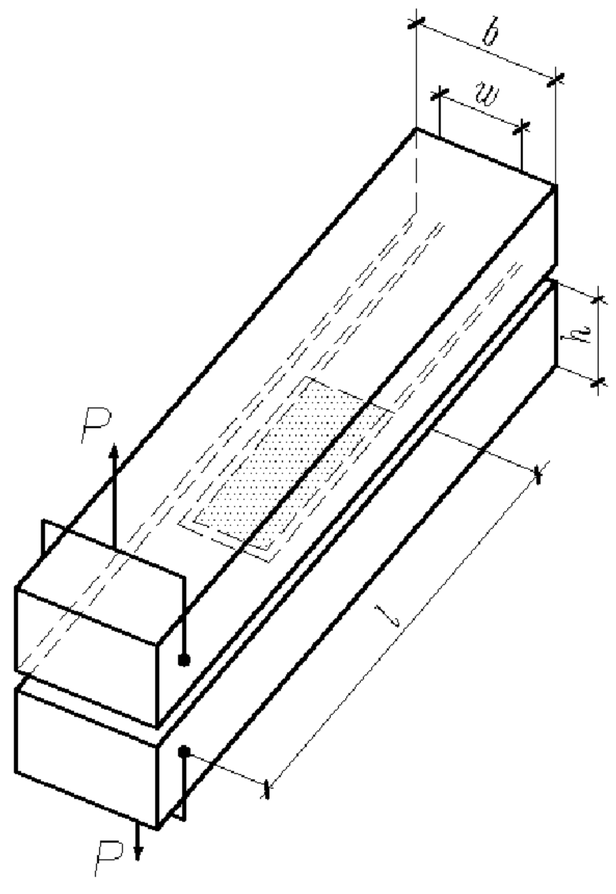



Рисунок 4.7 – Схема испытания образца типа "двойная консоль"

Образец имеет форму длинной призмы с двумя наружными пазами по длине призмы. Они служат как бы направляющими для развивающей трещины. Кроме того, на одном из торцов призмы имеется надрез для инициирования трещины. На этом торце прикладывается нагрузка в виде двух сосредоточенных сил P. Образец доводится до разрушения и фиксируется разрушающая сила $P_c$. Согласно теоретическому решению определяем

$$K_{Ic} = \frac{2\sqrt{3}P_c l}{\sqrt{bwh}\cdot h}\left(1 - 0,7h/l\right). \qquad (4.40)$$

Заслуживает внимания также метод определения $K_{IC}$ на стандартных кубических образцах с ребром d=100 мм с надрезами по двум параллельным

сторонам, имитирующими краевые трещины длиной l.Испытание производится путем внецентренного сжатия силой P, передаваемого через стальные прокладки на ребре куба. Для этой схемы МКЭ определено (λ=l/d)

$$K_{IC} = [18,3\lambda^{1/2} - 430\lambda^{3/2} + 3445\lambda^{5/2} - 11076\lambda^{7/2} + 12967\lambda^{9/2}]P_c / d^{3/2}. \qquad (4.41)$$

К важным параметрам механики разрушения бетона относится критическая скорость высвобождения энергии $G_{IC}$. Она может быть определена измерением податливости, как это описано выше при определении $K_{IC}$. Этот параметр может быть найден косвенным путем через КИН.

Для упругопластического разрушения критериальным параметром является предельное значение J-интеграла $J_{IC}$, который определяется по проекту ASTM-E24, описанным выше. Более простой, но менее точный способ экспериментального определения $J_{IC}$ основан на определении изменения потенциальной энергии dU при продвижении трещины на малую величину dl

$$J = -\frac{dU}{tdl}.$$

Эксперименты показывают, что сопротивление развитию трещин в бетоне зависит кроме материала бетона еще от дополнительных факторов. Так замечено, что с увеличением высоты изгибаемой балки $K_{IC}$ возрастает, стремясь к некоторому предельному значению. В опытах Уолша получено, что стабилизация наступает при высоте балки 230 мм. Также экспериментально получено, что с увеличением водоцементного отношения (W/C) уменьшается $K_{IC}$ и стабилизируется при W/C больше 0,5. Наибольшее применение в промышленности имеют бетоны с W/C=0,3-0,4, они и используются при изготовлении образцов.

К настоящему времени накоплен значительный экспериментальный материал по параметрам ЛМР бетона и прежде всего по $K_{IC}$. Вместе с тем использование их связано с рядом трудностей. Основная трудность заключается в том, что $K_{IC}$ зависит от ряда дополнительных факторов и прежде всего от состава и прочности бетона. Были проведены многочисленные эксперименты по изучению зависимости $K_{IC}$ от этих факторов. Анализ и обработка этих результатов дает следующие зависимости для нормировки предельного значения КИН [126]:

$$K_{IC} = m_1 R_{bt}, \quad K_{IC} = m_2 R, \quad K_{IC} = nM10^{-4}, \qquad (4.42)$$

R, $R_{bt}$ - кубиковая прочность и предел прочности на растяжение в МПа; M - марка цемента; КИН в МН/м$^{3/2}$.

Коэффициенты нормировки для мелкого заполнителя в зависимости от его объемного содержания приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1

| | Объемное содержание заполнителя в % | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | <10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 | >60 | |
| $m_1$ | 0,25 | 0,2 | 0,15 | 0,14 | 0,13 | 0,12 | 0,11 | |
| $m_2$ | 0,007 | 0,008 | 0,009 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | 0,01 | |
| N | 1,0 | 1,1 | 1,15 | 1,1 | 1,05 | 0,85 | 0,5 | |

Приведенные зависимости относятся к бетонам, у которых водоцементное отношение близко к W/C цементного теста нормальной густоты.

### 4.3 Оценка прочности элементов металлоконструкций с трещинами

В связи с повышением нагрузок на машины и конструкции возрастают требования к надежности их элементов. Повышение этих требовании вызвано еще и тем, что в элементах конструкций заведомо существуют или появляются в процессе эксплуатации дефекты типа трещин. Поэтому наряду с расчетами на прочность тел с трещинами необходимо развивать методику расчета на трещиностойкость. Это позволит обоснованно выбирать безопасные размеры трещин. При расчетах на прочность таких тел наряду с выбором соответствующего критерия разрушения важен обоснованный выбр коэффициента запаса на длину трещины.Отдельные аспекты этих проблем отражены в работах [4, 8, 98, 110, 126]. Выбор критерия разрушения зависит от материала изделия длины трещины и используемого параметра механики разрушения и изложен в параграфе 4.1.

Методы расчета на прочность при хрупком разрушении, базирующие на КИН (ЛМР), хорошо разработаны. Использование вязких материалов и ограничение на размеры трещин со стороны дефектоскопического контроля приводят к увеличению номинальных разрушающих напряжений $\sigma_p$, превышающих предел текучести $\sigma_T$, вследствие чего происходит вязкое разрушение. При вязком разрушении необходимо применение критериев нелинейной механики разрушения.

В критериальных соотношениях, приведенных в параграфе 4.1, параметр трещиностойкости зависит от номинального напряжения $\sigma$, длины трещины l, характерного размера детали b. С учетом этого критериальные соотношения можно представить в общем виде так

$$F(\sigma, l, b) \le F_c,$$

где равенство достигается в предельном случае $\sigma = \sigma_p$, $l = l_k$.

Под обозначением $F$ следует понимать любой параметр механики разрушения, а в правой части неравенства стоит его предельное значение. Параметр $F_c$ определяется испытанием стандартных образцов. Несовпадение

предельных параметров механики разрушения образца и детали учитывается конструкционным фактором $\psi$ , который вводится следующим образом [98]

$$F_c^{дет} = \psi F_c^{обр}.$$

Конструкционный фактор определяется опытным путем и представляется в виде эмпирической зависимости. Так, для двумерных изделий, работающих на изгиб и растяжение, рекомендуется

$$\psi \approx \sqrt{d_{дет} / d_{обр}},$$

где $d$ – размер вдоль трещины.

С учетом этих замечаний условие прочности конструкций запишем в виде

$$F(\sigma, l, b) \le F_c(\sigma_p, \psi). \qquad (4.50)$$

Расчетный параметр трещиностойкости $F$ может изменяться как за счет нагрузки, так и длины трещины. Поэтому целесообразно ввести коэффициенты запаса, различающие два этих случая [4]. При проведении прочностных расчетов расчетное напряжение берут из условия прочности, например, $\sigma_н = \sigma_в / n$, где $n$ – коэффициент запаса по пределу прочности. Для определения допускаемой длины трещины при заданном расчетном напряжении правую часть (4.50) следует уменьшить, например, в $m$ раз. Тогда условие прочности примет вид

$$F(\sigma_в / n, l, b) = F_c(\sigma_p, \psi) / m. \qquad (4.51)$$

Здесь $m$ – коэффициент запаса на длину трещины. Он показывает во сколько раз надо увеличить параметр трещиностойкости $F$ при неизменном уровне напряжений, чтобы $F$ достигла своего предельного значения $F_c$. При $m$=1 из уравнения (4.51) получаем критическую длину трещины $l_k$, соответствующую заданному напряжению $\sigma_н$, а при обоснованно выбранном значении $m$ - допустимую длину трещины $l_0$.

При наличии в конструкции допустимой трещины $l_0$ из уравнения (4.51) при $m$=1 находим номинальное разрушающее напряжение $\sigma_p(l_0)$. Тогда фактический запас прочности станет меньше $n$ и будет равен

$$n_0 = \sigma_p(l_0) / \sigma_н. \qquad (4.52)$$

Фактический запас прочности $n_0$ показывает, во сколько раз надо увеличить внешнюю нагрузку, чтобы допускаемая трещина стала критической.

Часто уравнение (4.51) является трансцендентным. В этом случае для проведения вышеизложенных расчетов эффективным является графоаналитический метод с построением диаграммы разрушения (рисунок 4.8).

Можно ввести коэффициент снижения запаса прочности $\alpha = \sigma_в / \sigma_р$. Тогда можно записать

$$n_0 = n/\alpha ,$$

то есть фактический коэффициент запаса определяется уменьшением коэффициента n. В работе [84, 98] предлагается определять фактический коэффициент запаса из соотношения

$$n_0 = n^{1-a/2}, \qquad (4.53)$$

где $a$ – показатель, равный отношению площади под критической диаграммой разрушения (над уровнем расчетного напряжения) к площади треугольника $0{,}5(\sigma_в - \sigma_н)l_k$ (рис. 4.10, в).

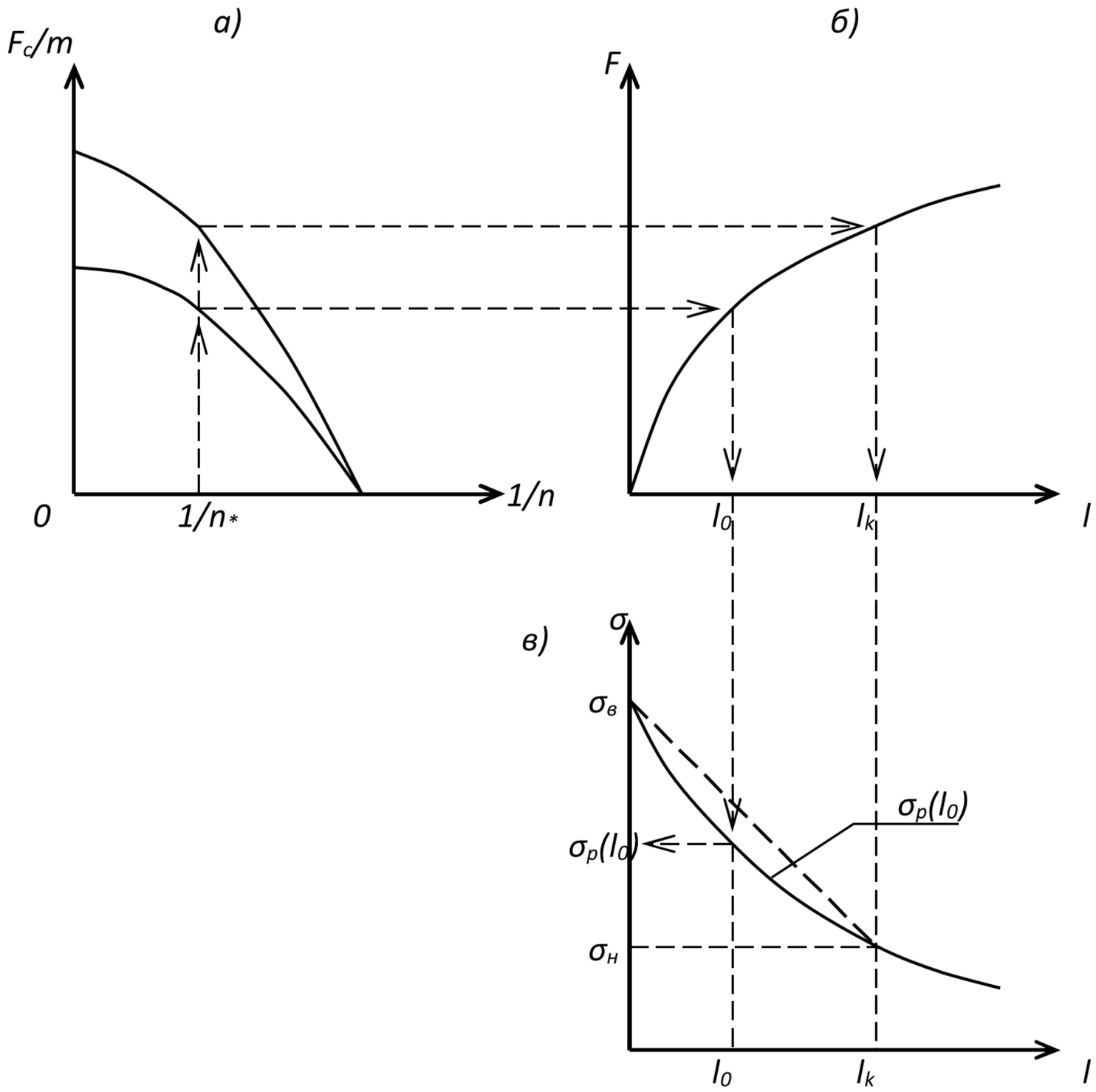



Рисунок 4.8 – К графоаналитическому методу оценки прочности

Таким образом,

$$a = S_1 / S_2 = 2\int_0^{l_k} \frac{\sigma_p(l)dl}{(\sigma_в - \sigma_н)l_k},$$

где $\sigma_p(l)$ - диаграмма критических напряжений, рассчитанная из (4.51) при $m=1$.

Обоснованный выбор коэффициента запаса на длину трещины очень важен в практическом плане и до сих пор нет согласованного подхода в этом вопросе. В работе [98] предложен следующий подход. Потребуем, чтобы при допустимой длине трещины номинальное разрушающее напряжение было не меньше предела текучести.

Запишем условие разрушения (4.50) в пограничном состоянии когда $\sigma = \sigma_T$, $l = l_T$:

$$F(\sigma_T, l_T) = F_c(\sigma_T)$$

Запишем далее условие прочности (4.51) при $\sigma = \sigma_н$, $l = l_T$:

$$F(\sigma_н, l_T) = F_c(\sigma_н)/m_0.$$

Отсюда находим искомый коэффициент

$$m_0 = \frac{F(\sigma_T, l_T)}{F(\sigma_н, l_T)} \cdot \frac{F_c(\sigma_н)}{F_c(\sigma_T)}. \qquad (4.54)$$

Это соотношение справедливо только при $\sigma_н \le \sigma_T$ и указывает только на возможный характер разрушения. Для выбора коэффициента $m$ целесообразно использовать критическую диаграмму разрушения [98]. Найдем величину коэффициента $m$ из критериального соотношения при $\sigma = \sigma_в/\alpha$, $l = l_0$:

$$F(\sigma_в/\alpha, l_0) = F_c(\sigma_в/\alpha)$$

и из расчетного уравнения при $\sigma = \sigma_н$, $l = l_0$

$$F(\sigma_н, l_0) = F_c(\sigma_н)/m_1.$$

Для определения коэффициента $m_1$ получаем формулу

$$m_1 = \frac{F(\sigma_в/\alpha, l_0)}{F(\sigma_н, l_0)} \cdot \frac{F_c(\sigma_н)}{F_c(\sigma_в/\alpha)}. \qquad (4.55)$$

Значение $\alpha$ с учетом ранее приведенных соотношений примет вид

$$\alpha = n^{a/2}. \qquad (4.56)$$

Итак, коэффициент запаса на длину трещины $m_1$ зависит от коэффициента запаса по пределу прочности, вида критической диаграммы разрушения, отражающей свойства материала, и конкретной величины параметра трещиностойкости. Из двух значений коэффициента $m$ естественно принять большее:

$$m = \max(m_0, m_1). \qquad (4.57)$$

Получим выражения для определения коэффициента запаса на длину трещины по вышеприведенным критериальным соотношениям. При применении критерия (4.1) с учетом (4.2) имеем

$$F_c = K_{IC}, \quad F = K = \sigma\sqrt{\pi l}\, f(\lambda) \quad (\lambda = l/b).$$

Тогда по формулам (4.54) и (4.55) получим

$$m_0 = \sigma_т / \sigma_н = n\sigma_т / \sigma_в, \quad m_1 = \sigma_в / \alpha\sigma_н = n\alpha = n^{1-a/2}. \qquad (4.58)$$

Если при определении КИН учесть поправку Ирвина, то

$$F = K = \sigma\sqrt{\pi l\left(1 + \sigma^2 / 2\sigma_т^2\right)} f(\lambda)$$

и по формулам (4.54) и (4.55) получим

$$m_0 = n\frac{\sigma_т}{\sigma_в}\sqrt{\frac{1{,}5}{1 + \left(\sigma_в / n\sigma_т\right)^2 / 2}}, \quad m_1 = n^{1-a/2}\sqrt{\frac{1 + \sigma_в / 2\sigma_T^2 n^a}{1 + \left(\sigma_в / n\sigma_т\right)^2 / 2}}. \qquad (4.59)$$

Если критериальное соотношение выражено через $J$ – интеграл в виде (4.12), то согласно (4.10) в условиях маломасштабной текучести получим

$$m_0 = \left(n\sigma_т / \sigma_в\right)^2, \quad m_1 = \left(n/\alpha\right)^2 = n^{2-a}. \qquad (4.60)$$

Для степенного закона упрочнения согласно (4.11) имеем

$$m_0 = \left(\sigma_т / \sigma_н\right)^{(1+m)/m} = \left(n\sigma_т / \sigma_в\right)^{(1+m)/m}, \qquad (4.61)$$
$$m_1 = \left(\sigma_в / \alpha\sigma_н\right)^{(1+m)/m} = \left(n/\alpha\right)^{(1+m)/m} = n^{(1-a/2)(1+m)/m}.$$

Если применяется деформационный критерий (4.16), то с учетом (4.15) по формуле (4.54) получим

$$m_0 = \overline{\sigma}_T^{q+2(m+1)} / \overline{\sigma}_н^{P_2+q}.$$

Так как $\overline{\sigma}_н < 1$, то $q=0$, а также $\overline{\sigma}_T = 1$. Тогда

$$m_0 = \left(\sigma_T / \sigma_н\right)^{P_2} = \left(n\sigma_T / \sigma_в\right)^{P_2}, \qquad (4.62)$$

где $P_2 = \dfrac{2 - 0{,}5(1-m)(1-\sigma_в / n\sigma_T)}{m+1}$.

В этих же условиях по формуле (4.55) определяем

$$m_1 = \left(\frac{\sigma_в/\alpha}{\sigma_н}\right)^q \cdot \frac{\left(\overline{\sigma}_в/\alpha\right)^{p_1}}{\overline{\sigma}_н^{p_2}} = n^{(1-a/2)q} \frac{\left(\sigma_в/\sigma_T n^{a/2}\right)^{p_1}}{\left(\sigma_в/\sigma_T n\right)^{p_2}}, \qquad (4.63)$$

где $P_1 = \dfrac{2 - 0{,}5(1-m)(1-\sigma_в/\sigma_T n^{a/2})}{m+1}$, $\quad q = (1-m)/m(m+1)$.

Рассмотрим двухпараметрические критерии разрушения. Такой критерий, выраженный в терминах КИН (4.22) можно представить в виде

$$K = K_{IC}\sqrt{1-\left(\sigma/\sigma_в\right)^q},$$

то есть $F = \sigma\sqrt{\pi l}\, f(\lambda), \quad F_c = K_{IC}\sqrt{1-\left(\sigma/\sigma_в\right)^q}$.

Тогда по формулам (4.54) и (4.55) получим

$$m_0 = n\frac{\sigma_T}{\sigma_в}\sqrt{\frac{1-n^{-q}}{1-\left(\sigma_T/\sigma_в\right)^q}}, \quad m_1 = n^{1-a/2}\sqrt{\frac{1-n^{-q}}{1-n^{-aq/2}}}. \qquad (4.64)$$

Двухпараметрический критерий в терминах J – интеграла (4.30) представим в виде

$$J = J_c\left[1-\left(\sigma/\sigma_в\right)^{1/m}\right]^{m+1} = F_c(\sigma).$$

Тогда с учетом выражения (4.11)

$$F = J = \frac{2\sigma^2\pi l f^2(\lambda)}{(1+m)E}\left(\frac{\sigma}{\sigma_T}\right)^{\frac{1-m}{m}} = \frac{2\sigma_T^2\pi l f^2(\lambda)}{(1+m)E}\left(\frac{\sigma}{\sigma_T}\right)^{\frac{1+m}{m}}.$$

Теперь по формулам (4.54) и (4.55) получим

$$m_0 = \left(\frac{\sigma_т}{\sigma_н}\right)^{\frac{1+m}{m}} \left[\frac{1-(\sigma_н/\sigma_в)^{1/m}}{1-(\sigma_т/\sigma_в)^{1/m}}\right]^{m+1} = \left(n\frac{\sigma_т}{\sigma_в}\right)^{\frac{1+m}{m}} \left[\frac{1-n^{-1/m}}{1-(\sigma_т/\sigma_в)^{1/m}}\right]^{m+1},$$

$$m_1 = \left(\frac{\sigma_в}{\alpha\sigma_н}\right)^{\frac{1+m}{m}} \left[\frac{1-n^{-1/m}}{1-\alpha^{-1/m}}\right]^{m+1} = n^{(1-a/2)(1+m)/m} \left[\frac{1-n^{-1/m}}{1-n^{-a/2m}}\right]^{m+1}. \qquad (4.65)$$

Двухпараметрический деформационный критерий (4.33) перепишем в виде

$$\overline{K}_{Ie} = \overline{K}_{Iec}\left[1-(\sigma/\sigma_в)^{1/m}\right] = F_c(\sigma),$$

где предельное значение КИД $\overline{K}_{Iec} = \overline{\varepsilon}_c\sqrt{2\pi l}$, а по (4.32) $\overline{K}_{Ie} = F = \overline{K}_1^p\overline{\sigma}^q$.

Теперь по формуле (4.54) с учетом преобразований, приведших к выражению (4.62), имеем

$$m_0 = (n\sigma_т/\sigma_в)^{p_2}\,\frac{1-n^{-1/m}}{1-(\sigma_т/\sigma_в)^{1/m}}. \qquad (4.66)$$

Далее по формуле (4.55) с учетом преобразований, приведших к выражению (4.63), получаем

$$m_1 = n^{(1-a/2)q}\,\frac{\left(\sigma_в/\sigma_T n^{a/2}\right)^{p_1}}{(\sigma_в/\sigma_T n)^{p_2}}\cdot\frac{1-n^{-1/m}}{1-n^{-a/2m}}. \qquad (4.67)$$

Обоснованный выбор коэффициента запаса на длину трещины позволяет из уравнения (4.51) определить допустимую длину трещины $l_0$. Выражения для определения критической длины трещины $l_k$ (следовательно, и $l_0$), а также разрушающих напряжений $\sigma_p$ приведены в параграфе 4.1 при рассмотрении соответствующего критерия.

При создании методики расчетов на прочность следует выделить два вида расчетов: проектный и проверочный расчет. Целью проектного расчета является определение критической длины трещины и коэффициента запаса, соответствующего допустимой длине трещины.

1. Задаемся материалом и выбираем нормативный коэффициент запаса по прочности $n$.

2. По выбранной расчетной схеме из условия прочности определяем размеры детали без учета трещин.

3. Анализ конструкции на наличие или возможность появления трещин в процессе эксплуатации.

4. Установление возможного вида разрушения и выбор критерия механики разрушения.

5. Для материала устанавливаем предельной величины параметра трещиностойкости $F_c$ и выбираем коэффициент безопасности $n_б$. Известно, что предельная характеристика $F_c$ определяется экспериментально в условиях плоской деформации. Поэтому при расчетах вводим поправочный коэффициент $\eta$ учитывает отличие НДС детали от плоской деформации. Теоретические расчеты по модели Броека и Влигера [7] приводят к соотношению, которое можно привести к виду

$$\eta = \sqrt{1 + \bar{\varepsilon}_c t_m / 565 t}\,, \tag{4.68}$$

где $t_m = 2{,}5(K_{IC}/\sigma_т)^2$; $t$ – толщина детали; а относительная местная разрушающая деформация определяется выражением (4.17). Экспериментальные данные дают основания для следующей оценки этого коэффициента

$$\eta = 1 \text{ при } t \geq t_m;\ \ \eta = \sqrt{t_m / t} \text{ при } t < t_m. \tag{4.69}$$

Коэффициент безопасности для хрупкого $n_x$ и вязкого разрушения $n_в$ учитывает обоснованность выбора предельного значения параметра трещиностойкости и точность его расчетного определения.

6. Путем расчета определяем параметр механики разрушения. Он должен быть представлен в аналитическом или графическом виде

$$(K, J, \delta, \varepsilon) = F(\sigma, l, b). \tag{4.70}$$

Если параметр определяется МКЭ, то такую возможность дают полученные выше регрессионные зависимости.

7. Определение критической длины трещины $l_k$ из условия

$$F(\sigma_н, l_k) = \eta F_c(\sigma_н)/n_б \qquad (\sigma_н = \sigma_в / n). \tag{4.71}$$

8. В соответствии с применяемым критерием разрушения по одной из вышеуказанных формул определяем коэффициент запаса на длину трещины.

9. Определение допустимой длины трещины $l_0$ из условия

$$F(\sigma_н, l_0) = \eta F_c(\sigma_н)/n_б m. \tag{4.72}$$

10. Определение разрушающего напряжения $\sigma_p$, соответствующего допустимой длине трещины производится из условия

$$F(\sigma_p, l_0) = \eta F_c(\sigma_p)/n_б . \qquad (4.73)$$

11. Определяем фактический коэффициент запаса прочности по формуле (4.52).

Целью проверочного расчета является определение допустимой длины трещины и сравнение с ней имеющейся длины трещины.

1. Выбор расчетной схемы и определение НДС детали (номинального расчетного напряжения $\sigma_н$).

2. Выбор предполагаемого вида разрушения и соответствующего ему критерия механики разрушения.

3. Определение предельной величины параметра трещиностойкости $F_c$ ($K_{1C}, J_{1C}, \delta_c, \varepsilon_c$) и назначение коэффициента безопасности $n_б$ ($n_x$ или $n_в$), коэффициента жесткости нагружения $\eta$ и других конструктивных факторов $\psi$.

4. Расчет параметра трещиностойкости и определение зависимости (4.70).

5. Из уравнения (4.71) определяется критическая длина трещины $l_k$ и проверяется условие ее не превышения

$$l + r_f < l_k ,$$

где поправка на пластическую зону

$$r_f = (K_1 / \chi\sigma_т)^2 / 2\pi .$$

Здесь $\chi = 1$ для ПНС и $\chi = \sqrt{3}$ для ПД. Если длина трещины больше критической, то надо уменьшить нагрузку или прекратить дальнейшую эксплуатацию изделия.

6. Выбрать коэффициент запаса по прочности $n$ и в зависимости от выбранного критерия по выведенным выше формулам найти коэффициент запаса на длину трещины $m$.

7. Определить из уравнения (4.72) допустимую длину трещины и проверить условие ее не превышения

$$l + r_f \le l_0 .$$

8. Из уравнения (4.73) определить разрушающее напряжение, соответствующее допустимой длине трещины $\sigma_p(l_0)$ и проверить условие его не превышения

$$\sigma_p \ge \sigma_н .$$

9. По формуле (4.52) определить фактический коэффициент запаса.

По результатам расчетов сделать выводы или выработать рекомендации по дальнейшей эксплуатации изделия.

По сравнению с элементами металлоконструкций с трещинами оценка прочности изгибаемых железобетонных элементов с трещинами требует более сложного подхода. Некоторые аспекты разрушения и оценки прочности железобетона с трещинами изложены в работах [124, 126, 153, 219, 220.]

В бетонном элементе трещины развиваются без нарушения сплошности сжатой зоны вплоть до достижения критического размера. При этом сжатая зона уменьшается. В отличие от неармированных элементов сжатая зона железобетона имеет определенное минимальное значение, обусловленное свойствами материалов, коэффициентом армирования. Эта минимальная высота сжатой зоны является для поперечных трещин барьером, по достижении которого их рост останавливается. Ведущими факторами процесса разрушения становятся текучесть арматуры, накопление микроразрывов, образование трещин в сжатом бетоне и его дробление.

Условием стабильности образовавшей трещины является критерии хрупкого разрушения, выраженный через КИН (4.1).

В неармированных изгибаемых элементах КИН описывается монотонно возрастающей функцией от длины трещины вплоть до разрушения. При наличии арматуры в изгибаемых элементах эта функция имеет вначале восходящую ветвь, на которой поведение трещины неустойчиво, так что малое увеличение нагрузки может вызвать ее значительный рост. Затем появляется нисходящая ветвь, или область устойчивого роста, где малому приросту нагрузки соответствует малое продвижение трещины. При этом существует такое значение длины трещины, при котором КИН равен нулю. Это состояние считается предельным и соответствующая ему длина трещины считается предельной. Нагрузка, соответствующая этому состоянию, близка к значению разрушающей нагрузки, вычисленному по методу предельных состояний.

В результате анализа напряженно-деформированного состояния блоков железобетонных элементов между трещинами Е.Н. Пересыпкиным и в ряде работ И.Б. Соколова [126] установлено, что при большом шаге поперечных трещин и длине их распространения более трети рабочей высоты сечения, в области вершины трещины нормальные напряжения $\sigma_y$ по площадкам, параллельным продольной оси, превышают напряжения в поперечном сечении $\sigma_x$. Это значит, что в процессе развития поперечных трещин после перескока с неустойчивой ветви на устойчивую создаются благоприятные условия для изменения направления развития трещин с поперечного на продольное. Появление продольных трещин резко снижает несущую способность конструкции, так как сопровождается сколом части элемента, ограниченной этими трещинами и сжатой зоной. Опасность скола возрастает, если имеются поперечные силы.

При малом шаге трещин в элементе, имеющем достаточный коэффициент армирования, по мере роста трещин растягивающие напряжения $\sigma_x$ больше $\sigma_y$ вплоть до предельной длины трещин, когда становится возможным дробление сжатого бетона.

Таким образом, при частом расположении поперечных трещин и нормальном армировании, исключающем разрывы арматуры, несущая способность сжатой зоны используется полностью. Если по тем или иным причинам (малое армирование, малое сцепление бетона с арматурой) формируются редкие поперечные трещины, то несущая способность сжатой зоны используется не полностью из-за образования продольных трещин.

Таким образом, применение расчетной схемы изгибаемых железобетонных элементов, дополненной характеристикой сопротивления бетона развитию трещин, позволяет более точно оценить несущая способность конструкции в предельной стадии.

### 4.4 Выводы по IV главе

1. Получены соотношения для построения диаграммы разрушения для упругого и упругопластического материала.
2. Путем уточнения показателя степени модифицирован двухпараметрический критерий в терминах КИН.
3. Использованием решения Нейбера усовершенствован деформационный критерий разрушения и получены новые критериальные соотношения, позволяющие оценивать прочность при больших размерах пластической зоны у вершины трещины через критерии линейной механики разрушения – КИН.
4. Получены аналитические выражения для определения коэффициента запаса на длину трещины для всех рассмотренных критериев механики разрушения.
5. На основе обобщения различных подходов к расчетам на трещиностойкость разработана методика прочностного расчета металлоконструкций с трещиноподобными дефектами.

# 5 РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РАСЧЕТУ И ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ТРЕЩИНОПОДОБНЫМИ ДЕФЕКТАМИ

## 5.1 Рекомендации по расчету изгибаемых железобетонных элементов с трещинами

Рассмотрим сначала расчет балки с учетом эксплуатационной трещины, т.е. начальная трещина отсутствует, имеющаяся трещина является следствием действующего изгибающего момента М.

1. Выбор расчетной схемы, определение опасного сечения и номинального изгибающего момента.

2. Выбор материалов и определение размеров бездефектного сечения по несущей способности. Расчет производится по утвержденным нормам. При этом надо учесть, что оптимальная стоимость железобетонных балок достигается при $\mu=(1\text{-}2)$ % и $\xi=x/h_0=0{,}3\text{-}0{,}4$.

3. Анализ конструкции на наличие или возможность появления трещин в процессе эксплуатации. Для этого надо:

- по формуле (2.4) или (2.5) определить усадочное растягивающее напряжение, и сравнить его с пределом прочности бетона на растяжение;
- если предусматривается предварительное натяжение арматуры, то из системы уравнений (2.27) и (2.28) или МКЭ (параграф 2.1.4) или из регрессионных зависимостей типа (2.30) надо определить предельное значение предварительного напряжения $\sigma_{pr}$ и назначить контрольное натяжение арматуры $\sigma_{con}=0{,}8\sigma_{pr}$;
- по формуле (2.35) определить момент по образованию трещины, сравнить его с номинальным моментом и сделать заключение о возможности появления трещины;
- по формуле (2.43) определить разрушающий момент $M_p$.

Этот расчет можно сделать и для арматуры без предварительного напряжения, а затем выбрать вариант, наиболее подходящий по условиям эксплуатаций и стоимости.

4. Определение параметров напряженного состояния в сечении с трещиной: максимальное сжимающее напряжение в бетоне $\sigma_b$, напряжение в арматуре $\sigma_s$, длина трещины $l$ и ширина ее раскрытия $a_m$. Их можно определить аналитически, используя соотношения параграфа 2.3.2, или МКЭ (параграф 2.3.3) или из регрессионных зависимостей типа (2.68-2.72). Для предварительно напряженной балки регрессионные зависимости дополняются соотношениями для определения напряжений от натяжения арматуры, которые можно определить аналитически (параграф 2.1.3), МКЭ (параграф 2.1.4) или из регрессионных зависимостей типа (2.30-2.33). Сложение двух напряженных состоянии ввиду физической нелинейности материала рекомендуется производить по предложенной нами методике, изложенной в параграфе 2.4.

5. Проверка по несущей способности сечения с трещиной. Для этого используются значения $\sigma_b$ и $\sigma_s$, найденные выше:

$$\sigma_b \le R_b, \quad \sigma_s \le R_s.$$

6. Проверка балки по эксплуатационной пригодности. Для этого используется найденное выше значение ширины раскрытия трещины $a_m$, которое должно быть меньше предельного значения $a_{crc}$, указанного в нормативных документах. При необходимости проводится проверка по прогибу, который можно определить МКЭ (параграф 2.3.3) или регрессионным зависимостям (2.73).

7. Определение предельного значения КИН ($K_{IC}$). Значение $K_{IC}$ определяется путем испытаний материала (параграф 4.2) или берется из справочников. При отсутствии этих данных можно использовать их нормированные значения: формула (4.42) и таблица 4.1.

8. Определение КИН путем расчета балки с трещиной, как это сделано в параграфе 3.4 при составлении таблицы 3.7. При этом значения высоты сжатой зоны *x*, длина трещины l будут найдены в процессе определения напряженного состояния балки (пункт 4). Здесь определяется высота растянутой зоны

$$z_p = h - x - l$$

и по формуле (3.43) определяется КИН.

9. Путем сравнения КИН с предельным значением $K_{IC}$ для данного материала делаем заключение о характере развития эксплуатационной трещины. Если КИН меньше или равно $K_{IC}$, то трещина является устойчивой: небольшое изменение нагрузки вызывает малое приращение трещины, что неопасно для дальнейшей эксплуатации. Если КИН превышает $K_{IC}$, то трещина неустойчива: небольшое изменение нагрузки может вызывать существенный рост трещины, что приводит к повышению сжимающих напряжений в балке и растягивающих напряжений в арматуре. В этом случае надо принять меры по обеспечению трещиностойкости балки: уменьшить нагрузку или усилить балку.

Пусть теперь в балке имеется начальная трещина длиной $l_0$. Расчет начинаем с определения по формулам (3.36) и (3.37) момента $M_m$, при котором напряжение у вершины трещины $\sigma_m$ будет равно пределу прочности бетона на растяжение $R_{bt}$. Если действующий момент больше $M_m$, то произойдет рост трещины до эксплуатационного значения. При этом расчет балки надо производить по вышеизложенной методике.

Если $M \le M_m$, то расчет напряженного состояния и проверка трещиностойкости балки производится по методике, изложенной в параграфе 3.4. Изложим эту методику в виде алгоритма расчета.

1. Для действующего момента определяем параметр нагрузки

$$L = M / R_{bt} b h^2 .$$

2. Для известного $z_0 = l_0 / h$ решаем совместно систему уравнений (3.38), (3.39) и находим безразмерную высоту сжатой зоны $\xi$ и параметр "c".

3. Определяем параметры напряженного состояния в сечении с трещиной:

$$\lambda = 1 - \xi - z_0, \quad y = -\ln(1-c), \quad \sigma_m = 1{,}1 c R_{bt},$$
$$\sigma_b = 1{,}1 R_{bt}\, y\xi / \lambda, \quad \sigma_s = 1{,}1 R_{bt}\, y\alpha\psi_{bs}(\bar{h} - \xi)/\lambda\,. \qquad (5.1)$$

4. По напряжениям и проверяем несущую способность балки. Для сокращения расчетов заметим, что нарушение несущей способности возможно при $M_m \geq M_p$. Равенству моментов соответствует предельное значение начальной длины трещины $z_{0p}$, которое находится из графика на рисунке 3.15 при $L_m=L_{mp}=M_p/bh^2R_{bt}$. Поэтому при $z_0<z_{0p}$ эту проверку можно не проводить. Если $z_0 \geq z_{0p}$, то существует некоторое значение параметра напряжения у вершины трещины $c_p$, при превышении которого нарушается несущая способность балки. Это значение находится из решения системы (3.38) и (3.39) при $L=L_{mp}$.

5. Применением экспериментальной формулы (2.62) производим проверку балки по ширине раскрытия трещины.

6. По графику на рисунке 3.18 определяем параметр t и по формуле (3.42) определяем КИН.

7. Путем сравнения КИН с предельным значением $K_{IC}$ для данного материала делаем заключение о характере развития начальной трещины.

## 5.2 Примеры расчета элементов конструкций с трещинами

С целью проверки ранее высказанных соображений об областях применения различных критериев механики разрушения рассмотрим пример определения разрушающего номинального напряжения по некоторым вышеизложенным критериям.

**Пример 1**. Во третьей главе получены зависимости для расчета КИН растянутой пластины размером $b \times h$ в плане и наклонной трещиной длиной $l = 2l_0$ (формулы 3.37, 3.38). На основании формулы (4.24)

$$f(K) = \sqrt{\left(1-\nu^2\right)\left[f^2(K_I) + f^2(K_{II})\right]}.$$

Примем следующие геометрические размеры пластины и трещины:

$$l_0 = 10\,мм\,; \quad \alpha = 30^\circ = 0{,}524\,; \quad l/b = 0{,}2\,; \quad l/h = 0{,}2\,.$$

Тогда $f(K_I) = 0{,}842$, $f(K_{II}) = 0{,}437$, $f(K) = 0{,}905$, $(\nu = 0{,}3)$.

Пусть пластина изготовлена из высоко пластичного материала – Ст. 3: $\sigma_T = 220\,МПа$; $\sigma_в = 420\,МПа$; $\psi = 0{,}6$; $m = 0{,}22$, $K_{IC} = 1012\,н/мм^{3/2}$.

Определим разрушающее номинальное напряжение по двухпараметрическому критерию в терминах КИН. Тогда уравнение (4.23) примет вид $(1/\mathsf{m}=4{,}48)$

$$\mathsf{x}^{2{,}24}+4{,}429\,\mathsf{x}-1=0\,,\quad \mathsf{x}=\left(\sigma_{\mathsf{p}}/\sigma_{в}\right)^2.$$

Решая это уравнение, находим $x=0{,}2185$, $\sigma_p=196{,}5\ МПа$.

Определим разрушающее напряжение по двухпараметрическому деформационному критерию. Местную разрушающую деформацию определяем по формуле (4.17). Для плоской деформации [58] $\mathsf{D_e}=0{,}209$, $\mathsf{I}=2{,}49$, а истинное разрушающее напряжение [216]

$$\bar{\mathsf{S}}_{\mathsf{k}}=\left(1+1{,}35\psi\right)\sigma_{в}/\sigma_{T}=3{,}457\,.$$

Тогда $\bar{\varepsilon}_c=3{,}457^{4{,}48}\,0{,}209/2{,}49=21{,}76$.

Уравнение (4.34) теперь примет вид

$$0{,}0552\,x^{4{,}48}+0{,}905^{\mathsf{L}}1{,}218^{\mathsf{p}}\,\mathsf{x}^{\mathsf{p+q}}/\left(2^{\mathsf{p}/2}\,21{,}76\right)^{\mathsf{m}}-1=0\,,\ \mathsf{x}=\sigma_{\mathsf{p}}/\sigma_{\mathsf{T}}\,,$$

где $\mathsf{p}=\left[2-0{,}39(1-\mathsf{x})\right]/1{,}22$; $\mathsf{q}=2{,}9\ (\mathsf{x}>1)$; $\mathsf{L}=\mathsf{p}(\mathsf{p}+2\mathsf{q})/(\mathsf{p}+\mathsf{q})$; $\mathsf{m}=\mathsf{q}/(\mathsf{p}+\mathsf{q})$.

Решая это уравнение на ПЭВМ, находим

$$\mathsf{x}=1{,}48\quad,\ \sigma_{\mathsf{p}}=325\,МПа\,,$$

что больше предыдущего результата в 1,65 раза. Этот результат вполне естественен, так как критерий КИН для высоко пластичных материалов дает существенные погрешности.

Теперь возьмем мало пластичный материал – алюминиевый сплав Д16Т с характеристиками [7, 216]:

$$\sigma_{0{,}2}=374\,МПа;\ \sigma_{в}=500\,МПа;\ \psi=0{,}22;\ \mathsf{m}=0{,}135;\ \mathsf{K_{IC}}=1040\,н/мм^{3/2}\,.$$

Уравнение (4.23) примет вид

$$x^{3{,}7}+6{,}6x-1=0\,.$$

Отсюда $x=0{,}1514$, $\sigma_p=\sqrt{0{,}1514}\cdot 500=195\ МПа$.

Расчет по деформационному критерию:

$$\bar{\mathsf{S}}_{\mathsf{k}}=1{,}734;\quad \bar{\varepsilon}_{\mathsf{c}}=4{,}93;\quad 0{,}1166\mathsf{x}^{7{,}4}+0{,}905^{\mathsf{L}}\cdot 2^{\mathsf{p}}\cdot\mathsf{x}^{\mathsf{p+q}}/\left(2^{\mathsf{p}/2}\cdot 4{,}93\right)^{\mathsf{m}}-1=0;$$

$$\mathsf{q}=5{,}65\ \text{при}\ \mathsf{x}>1\ \text{и}\ \mathsf{q}=0\ \text{при}\ \mathsf{x}\le 1.$$

Решая это уравнение, находим $x = 0{,}55$, $\sigma_р = 205{,}5\ МПа$. Расхождение результатов составляет около 5 %.

Многочисленные расчеты показывают, что двухпараметрический критерий в терминах КИН дает хорошие результаты для материалов средней пластичности, у которых $E/\sigma_T < 300$.

**Пример 2**. Рассмотрим пример проектного расчета прямоугольной пластины с краевой трещиной, растянутой перпендикулярно фронта трещины силой F=150 кН. Пластина изготовлена из алюминиевого сплава Д16Т-1 с характеристиками $\sigma_в = 500\,МПа$, $\sigma_T = 340\,МПа$ [7, 215]. Характеристики трещиностойкости возьмем из графика 26.6 [4]: $I_m = 2000\,H/мм^{3/2} = K_{IC}$, $q = 1/m = 5$. Коэффициент запаса по пределу прочности примем n=2. Толщина пластины t=15 мм, а длина h=50 мм. Из расчета на прочность без учета трещины найдем ширину пластины

$$b = \frac{Fn}{t\sigma_в} = \frac{150 \cdot 2 \cdot 10^3}{15 \cdot 500} = 40\,мм.$$

Применим двухпараметрический критерий в терминах КИН в виде (4.22). Тогда расчетное уравнение (4.71) примет вид

$$K = \eta K_{IC}\sqrt{1-(\sigma/\sigma_в)^q}/n_Б.$$

Коэффициент $\eta$ примем равным 1, так как для $K_{IC}$ принято максимальное значение трещиностойкости из опыта [4]. Для определения КИН воспользуемся регрессионными зависимостями (3.34, 3.35). Учитывая приближенный характер расчета КИН, примем коэффициент безопасности $n_Б = 1{,}1$.

Далее расчетное уравнение перепишем в виде

$$x^{q/2} + \pi(\sigma_в n_Б / K_{IC})^2 l\, f^2(K)x - 1 = 0,$$

где $x = (\sigma/\sigma_в)^2$; $f(K) = (0{,}696 - 0{,}594\alpha)^{-1} + (0{,}475 - 0{,}18\beta)^{-1} - 2{,}333$;
$\alpha = l/h$; $\beta = l/b$.

После подстановки численных значений параметров, расчетное уравнение примет вид

$$x^{2,5} + 0{,}2376 l\, f^2(K)x - 1 = 0. \qquad (а)$$

Задаваясь различными значениями l, методом Ньютона решаем это трансцендентное уравнение. При малых значениях $l(\alpha,\beta)$ для расчета $f(K)$ вместо регрессионных зависимостей используются решения для бесконечных

пластин. Эти расчеты позволяют построить зависимость разрушающего напряжения от длины трещины (рис. 5.1). Из этого рисунка находим, что для номинального напряжения $\sigma_н = \sigma_в / n = 250\,МПа$ критическая длина трещины $l_k = 7\,мм$.

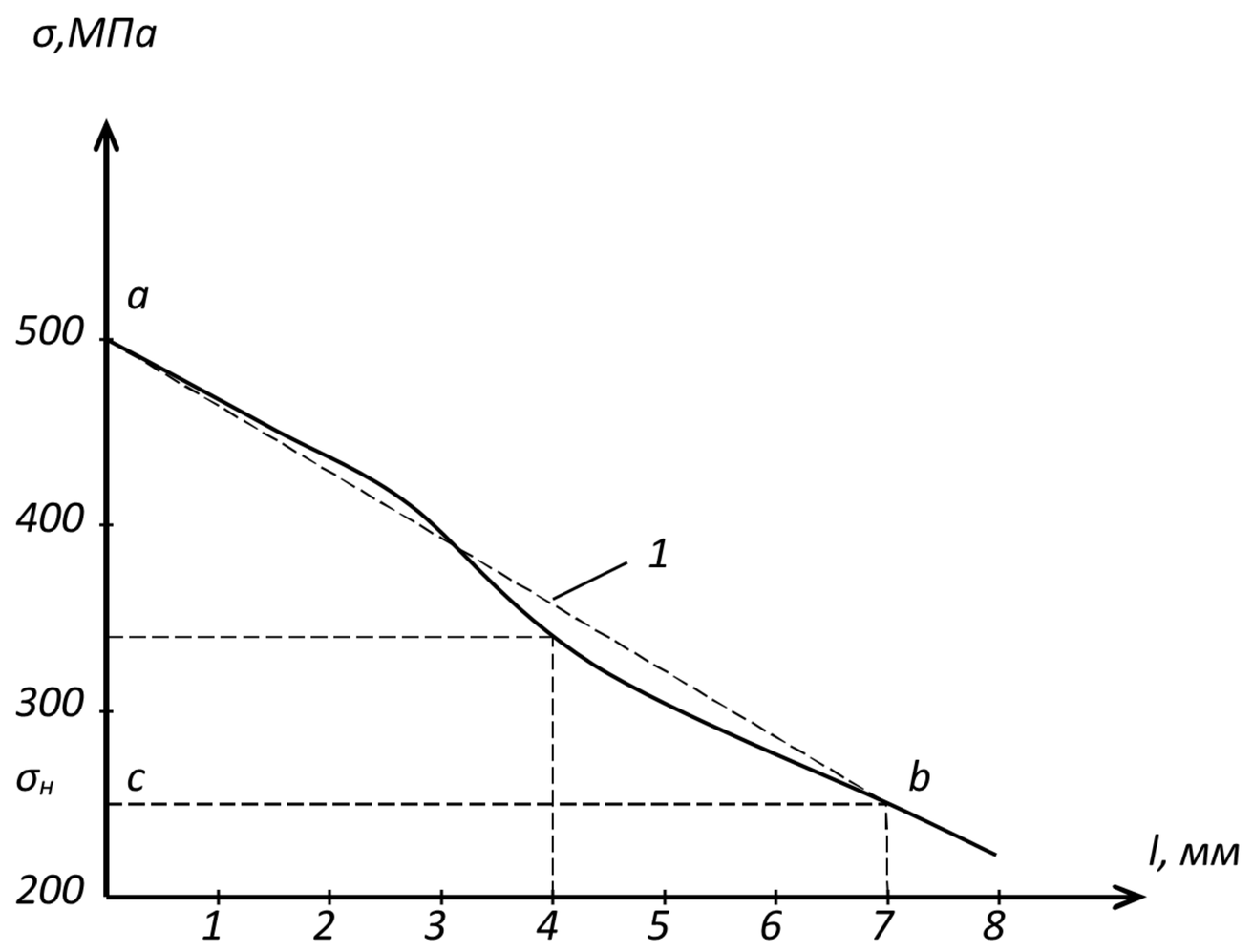



Рисунок 5.1 – Диаграмма разрушения материала

Если диаграмму построить в масштабе, то можно графически определить коэффициент *a*, как отношение площади диаграммы *авс* к площади треугольника *авс*. В нашем случае он оказался равным *a*=0,97. Теперь по формулам (4.64) определяем коэффициент запаса на длину трещины

$$m_0 = 2\frac{340}{500}\sqrt{\frac{1-0{,}5^5}{1-0{,}68^5}} = 1{,}45; \quad m_1 = 2^{0{,}515}\sqrt{\frac{1-0{,}5^5}{1-2^{-0{,}485}}} = 1{,}557.$$

Отсюда m=1,557.

Теперь определяем допустимую длину трещины. Для этого $K_{IC}$ уменьшаем в m раз, а $\sigma$ полагаем равным $\sigma_н$. Тогда расчетное уравнение (а) примет вид

$$0{,}5^5 + 0{,}2376 \cdot 1{,}557^2 \cdot 0{,}5l\, f^2(K) - 1 = 0,$$

или $l\, f^2(K) = 6{,}727$.

Решая это трансцендентное уравнение, находим $l_0 = 3{,}94\,мм$, а из диаграммы 5.1 находим $\sigma_{кр}(l_0) = 340\,МПа$.

Теперь фактический коэффициент запаса

$$n_0 = 340/250 = 1{,}36,$$

что говорит о снижении коэффициента запаса по сравнению с бездефектной пластиной на 32 %.

**Пример** 3. Рассмотрим пример проверочного расчета прочности прямоугольной пластины ($b\times h\times t = 80\times 100\times 10\,мм$) с центральной трещиной $l = 15\,мм$, растянутой поперек трещины силой F=320 кН. Пластина изготовлена из стали 15Х2МФА с характеристиками [14]: $\sigma_в = 920\,МПа$, $\sigma_т = 520\,МПа$, $m = 0{,}25$, $J_{IC} = 162\,Н/мм$.

Определим номинальное напряжение и коэффициент запаса по пределу прочности

$$\sigma = F/bt = 320\cdot 10^3/80\cdot 10 = 400\,МПа;\quad n = \sigma_в/\sigma = 2{,}3.$$

Применим критерий вязкого разрушения, выраженный через J – интеграл. J – интеграл определим через КИН по формулам (4.11). Для расчета КИН используем ранее полученные регрессионные зависимости (3.32, 3.33). Учитывая приближенный характер расчета параметра трещиностойкости, примем $n_Б = 1{,}1$. Коэффициент $\eta$ определяем по формуле (4.69), где

$$t_m = 25J_{IC}/\sigma_g = \frac{25\cdot 162}{(920+520)/2} = 5{,}6\,мм.$$

Так как $t > t_m$, принимаем $\eta = 1$.

Для удобства дальнейшего анализа построим диаграмму разрушения. С учетом (4.11), (4.12) и равенства

$$K^2 = \sigma^2 0{,}5\pi l f^2(K),$$

получаем следующие выражения

$$\sigma = \sigma_T\left[\frac{(1+m)EJ_c}{\pi l f^2\sigma_т^2 n_Б}\right]^{\frac{m}{m+1}},\quad \sigma > \sigma_т;\qquad \sigma = \sqrt{\frac{(1+m)EJ_c}{\pi l f^2 n_Б}},\quad \sigma \le \sigma_т.$$

После подстановки числовых значений эти выражения примут вид

$$\sigma = 520\left(43{,}34/l f^2\right)^{0{,}2},\quad \sigma > \sigma_т;$$
$$\sigma = 3354{,}5/f\sqrt{l},\qquad \sigma \le \sigma_т, \qquad (б)$$

где $\alpha = l/h;\ \beta = l/b;$

$$f = (1{,}022 - 0{,}49\alpha)^{-1} + (0{,}82 - 0{,}133\beta)^{-1} - 1{,}272,\ 0{,}1 \le \beta \le 0{,}4;$$

$$f = 1{,}165\alpha^2 - 0{,}475\alpha + 4{,}118\beta^2 - 3{,}756\beta + 2{,}12,\ 0{,}4 < \beta \le 0{,}7.$$

По этим выражениям строим диаграмму разрушения (рис. 5.2). Из диаграммы определяем критическую длину трещины, соответствующую номинальному напряжению $\sigma = 400\,МПа$: $l_{кр} = 45\,мм$.

Определим пластическую поправку на длину трещины

$$r_f = \left( \frac{400\sqrt{\pi 15/2}\cdot 1{,}064}{\sqrt{3}\cdot 520} \right)^2 / 2\pi = 0{,}84\,мм.$$

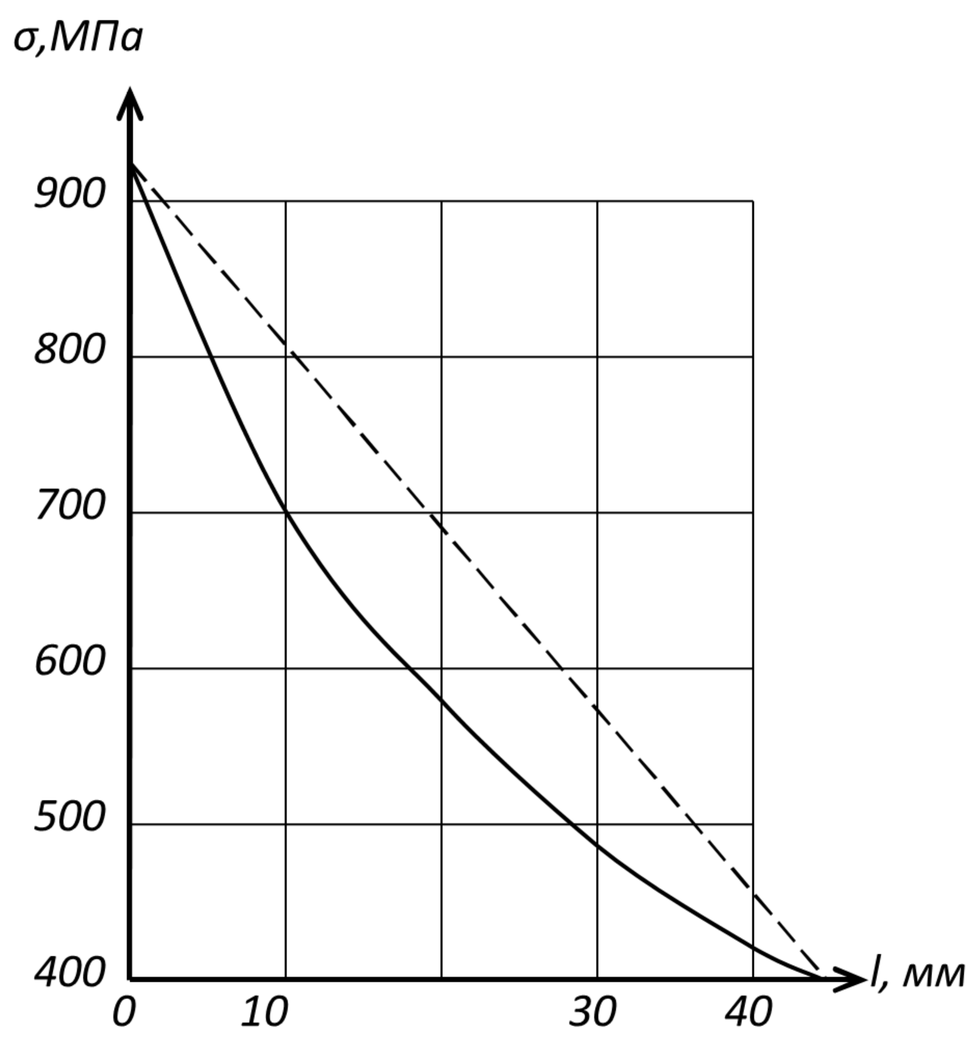



Рисунок 5.2 – Диаграмма критических напряжений для стали 15 2*МФА*

Далее по диаграмме разрушения определяем коэффициент

$$a = 44{,}5/57{,}75 = 0{,}77.$$

Определим коэффициент запаса на длину трещины. Для упругой области ($\sigma = 400\,МПа$) по формулам (4.60)

$$m_0 = 1{,}69,\quad m_1 = 2{,}3^{1{,}23} = 2{,}785.$$

Из соотношения (б)

$$\mathsf{f}\sqrt{\mathsf{l}} = 3354{,}5/400 \cdot 2{,}785 \approx 5.$$

Отсюда $\mathsf{l}_0 = 23\,мм$, следовательно, $\mathsf{l} + \mathsf{r}_\mathsf{f} \le \mathsf{l}_0$.

По диаграмме найдем разрушающее напряжение, соответствующее допускаемой трещине: $\sigma_p(\mathsf{l}_0) = 555\,МПа$. Коэффициент запаса по допускаемой трещине

$$\mathsf{n}_0 = 555/400 = 1{,}39.$$

Теперь найдем разрушающее напряжение, соответствующее имеющейся длине трещине $\mathsf{l} = 15\,мм$: $\sigma_p(\mathsf{l}) = 627\,МПа$. Фактический коэффициент запаса

$$\mathsf{n}_ф = 627/400 = 1{,}57.$$

Мы видим, что с учетом трещины фактический коэффициент запаса уменьшился на 31,7% по сравнению с бездефектным изделием.

**Пример 4**.

Железобетонная балка прямоугольного сечения размерами $в = 2{,}5\,см,\ h = 30\,см$ армирована двумя стержнями диаметром $20мм$ из стали AIII ($\mathsf{R_s} = 370\ МПа, \mathsf{E} = 2\cdot10^5\ МПа$). Процент армирования $\mu = 1{,}5\%$, защитный слой $2{,}8см$, арматура не натянута. Балка изготовлена из бетона B25 с характеристиками: $\mathsf{R_b} = 14{,}5\ МПа,\ R_{bt} = 1{,}6\ МПа,\ E_b = 24000\ МПа,\ K_{1C} = 0{,}42\ Мн/м^{3/2}$.

Требуется проверить работоспособность балки при действий в опасном сечении изгибающего момента $M = 32{,}2\,кНм$.

Определим разрушающий момент по формуле (2.43):

$$\mathsf{x}_p = \mathsf{R_s}\mu\mathsf{h}/\mathsf{R_b} = 370 \cdot 0{,}015 \cdot 0{,}3/145 = 0{,}115\,м,$$

$$\mathsf{M_p} = 370 \cdot 10^3 \cdot 6{,}75 \cdot 10^{-4}\left(0{,}3 - 0{,}028 - 0{,}115/2\right) = 53{,}6\,кНм.$$

Определим момент по образованию трещины. Для этого применим уравнения (2.34$'$) и (2.35$'$) при

$$\mathsf{s} = 0, \quad \mu\alpha = 0{,}015 \cdot 2 \cdot 10^5/24000 = 0{,}125.$$

Из первого уравнения находим

$$P = 2\left(1,05 + 2,05 \cdot 0,125\right) = 2,612,\ \ q = -P/2 = -1,306,\ \xi = -P/2 + \sqrt{P^2/4 - q} = 0,429$$

Из второго уравнения:

$$bh^2 R_{bt} = 0,15 \cdot 0,3^2 \cdot 1600 = 21,6\ кНм;$$

$$M_m = 21,16\left[\left(1 - 0,429\right)\left(0,076 + 0,265 \cdot 0,429\right) + 2,667 \cdot 0,125\left(0,5 - 0,093\right)\right] = 5,2 кНм.$$

Определим напряженное состояние балки с помощью регрессионных зависимостей (2.68-2.73), полученных для бетона В25. В этих соотношениях $m = M / Mp = 0,6$. Подставив характеристики балки определяем:

$$\sigma_b = 0,6 \Big/ \begin{matrix} \left(0,035 + 0,02 \cdot 0,6\right) + 5,594 \cdot 10^{-4} \cdot 30^2 - 0,0326 \cdot 30 + 1,679/15 - 0,695 \cdot 1,5^2 + \\ +4,339 \cdot 1,5 + 1,367 \cdot 10^{-8} \cdot 2,4^2 \cdot 10^8 - 6,413 \cdot 10^{-4} \cdot 24000 + 2,392 = 12,22 МПа; \end{matrix}$$

$$\sigma_s = 332,86 \cdot 0,6^{1,969} - 7 \cdot 9 + 3,523 \cdot 30 - 3,463 \cdot 15 - 39,52 \cdot 1,5 - 62,4 \cdot 2,4^2 +$$
$$+30,52 \cdot 2,4 - 212,2 = 214,06 МПа;\ \ l_m = 15,45\ см;\ \ x = 11,02\ см\ \ (\text{таблица } 3.7);$$

$$a_m = 0,183 \cdot 0,6 - 8,727 \cdot 9 \cdot 10^{-3} + \left(6,25 \cdot 3 - 1,323 \cdot 2,25 + 6,78 \cdot 1,5\right) \cdot 10^{-2} -$$
$$-0,154 \lg 1,5 + 1,17/24 - 0,189 = 0,124\ мм;$$

$$f_m = -13,436 \cdot 0,6^2 + 18,594 \cdot 0,6 - 5,524 \lg 30 + 0,0366 \cdot 15 - 0,621/1,5 - 0,4056 \cdot 2,4 + 6,06 = 3,38\ мм.$$

Согласно нормативным требованиям [120]:

$$a_{crc1} = 0,4\ мм,\ \ a_{crc2} = 0,3\ мм,\ \ f_{max} = l/200 = 9\ мм.$$

Отсюда заключаем, что требования по обоим группам предельных состояний удовлетворяются.

Проверим теперь трещину по критерию механики разрушения. Для этого сначала определим высоту растянутой зоны

$$z_p = h - x - l = 30 - 15,45 - 11,02 = 3,53 см.$$

Далее определим КИН по формуле (3.43)

$$K_I = 0,914 \cdot 1,6\sqrt{0,0353} = 0,275 МН/м^{3/2}.$$

Так как $K_I \le K_{IC}$, то трещина устойчива.

Пусть момент увеличился до значения $M=45{,}6\,кНм$ ($m=0{,}85$). Тогда аналогичные расчеты дают:

$$l_m = 16{,}75\,см;\ \ x = 13{,}17\,см,\ \ z_p = 0{,}08\,см,\ K_I = 0{,}041;$$
$$\sigma_b = 15{,}8\,МПа,\ \ \sigma_s = 334\,МПа,\ \ a_m = 0{,}17\ мм.$$

Здесь возможно дробление бетона сжатой зоны.

**Пример 5.** Рассмотрим ту же балку, но имеющую начальную трещину $z_0 = 0{,}2$ ($l_0 = 6\,$см). Требуется выполнить проверочный расчет балки при действии в сечении изгибающего момента $M=9{,}5\ кНм$.

Определяем значение момента, при котором напряжение у вершины трещины будет равно пределу прочности бетона $R_{bt}$. По формулам (3.36) и (3.37) или графику на рисунке 3.15 определяем $L_m = 0{,}461$. Тогда

$$M_m = 0{,}461 \cdot 21{,}6 = 9{,}96\,кНм.$$

Так как $M<M_m$, то расчет напряженного состояния и КИН ведем по методике, изложенной в параграфе 3.4. Из таблицы 3.7 имеем $c = 0{,}885$, $t = 0{,}8$, $\lambda = 0{,}348$. Тогда $y = -\ln(1-c) = 2{,}163$, $\xi = 1 - z_0 - \lambda = 0{,}452$.

При расчетах примем $\psi_{bs} = 1{,}2$. По формулам (5.1) определяем напряжения:

$$\sigma_b = 1{,}1 \cdot 1{,}6 \cdot 2{,}163 \cdot 0{,}452 / 0{,}348 = 4{,}94\,МПа;$$
$$\sigma_s = 1{,}1 \cdot 1{,}6 \cdot 2{,}163 \cdot (200/24) \cdot 1{,}2 \cdot (0{,}907 - 0{,}452) / 0{,}348 = 49{,}8\,МПа.$$

По экспериментальной формуле (2.62) находим ширину раскрытия трещины

$$a_m = 20 \cdot (3{,}5 - 1{,}5) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (1{,}6 - 1{,}5 \cdot 0{,}015)\left(49{,}8 / 2 \cdot 10^5\right)\sqrt[3]{20} = 0{,}037\ мм.$$

Проверка по требованиям обоих групп предельных состоянии удовлетворяются с большим запасом.

Определим КИН по формуле (3.42)

$$K_I = 1{,}1 \cdot 1{,}6(1 - 0{,}115)^{0{,}2}\sqrt{6{,}28 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}348 \cdot 0{,}3} = 0{,}448\,МН / м^{3/2}.$$

Так как $K_I > K_{IC}$, то произойдет рост трещины при этом КИН будет уменьшаться до значения $K_{IC}$. Чтобы найти новую длину трещины по данным таблицы 3.7 построим график зависимость $K_I = f(z_0)$ и из него найдем значения $z_{ok} = 0,235$, соответствующее предельному значению КИН. Очевидно, при этом напряжения в сечении возрастают незначительно.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе получены новые результаты, совокупность которых имеет важное значение для расчета и проектирования элементов строительных конструкций с трещиноподобными дефектами.

Основные выводы и результаты, полученные в диссертации, сводятся к следующему:

1. Разработана методика нелинейного аналитического расчета напряженного состояния железобетонных элементов при предварительном натяжении арматуры и на этой основе определено предельное значение предварительного натяжения арматуры, при котором появляется трещина на стадии изготовления.

2. На базе составленной матрицы рационального планирования проведены многофакторные компьютерные эксперименты по определению предварительных напряжений в железобетонных элементах прямоугольного сечения. Путем обработки результатов экспериментов по программе нетрадиционного регрессионного анализа ANETR получены аналитические выражения для определения предварительных напряжений в железобетонных элементах из бетона классов В25 и В40.

3. Предложена новая методика определения момента по образованию трещины, учитывающая реальную эпюру распределения напряжений в растянутой зоне.

4. Разработан новый аналитический метод расчета изгибаемых железобетонных балок с трещиной, позволяющий определить все параметры напряженного состояния, в том числе и длину трещины.

5. На базе рационального планирования и с использованием ПК ЛИРА проведены многофакторные компьютерные эксперименты по определению напряженного состояния изгибаемых железобетонных балок прямоугольного сечения с трещиной. Путем обработки результатов экспериментов по программе ANETR получены регрессионные зависимости для параметров напряженного состояния изгибаемых железобетонных балок, в том числе для длины и ширины раскрытия трещины.

6. С использованием ПК ANSYS решены плоские задачи механики разрушения для прямоугольных пластин конечных размеров с различным расположением трещин. Путем проведения компьютерных экспериментов и обработки результатов по специальной программе получены регрессионные зависимости для КИН при различном расположении трещин.

7. Получено приближенное аналитическое решение задачи об определении КИН в изгибаемых железобетонных балках прямоугольного сечения в линейной и нелинейной постановке.

8. Использованием решения Нейбера усовершенствован деформационный критерий разрушения и получены новые критериальные соотношения, позволяющие оценивать прочность при больших размерах пластической зоны у вершины трещины через критерии линейной механики разрушения – КИН.

9. На основе обобщения различных подходов к расчетам на трещиностойкость разработана методика прочностного расчета металлоконструкций с трещиноподобными дефектами. Получены аналитические выражения для определения коэффициента запаса на длину трещины для всех рассмотренных критериев механики разрушения.

10. Разработаны рекомендации по расчету изгибаемых железобетонных элементов с трещинами.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ


1 Седов Л.И. Механика сплошных сред т. 2. – М.: Наука, 1976.– 573 с.

2 Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.

3 Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами – Киев: Наукова думка, 1968. – 246с.

4 Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1985. – 504 с. 3-е изд. М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2008. В 2 томах: Т. 1. - 352 с. Т. 2. – 192 с.

5 Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения в теории упругости. – М.: Наука, 1977. – 311 с.

6 Морозов Е.М., Никишков Г.П. Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Наука, 2008. – 256 с.

7 Броек Д. Основы механики разрушения. – М.: Высшая школа, 1980.– 368 с.

8 Разрушение / Под ред. Г. Либовица. – М.: Мир, 1975-1977. Т. 1-7.

9 Пестриков В.М., Морозов Е.М. Механика разрушения твердых тел. Курс лекций / Спб.: Профессия, 2002. – 320 с.

10 Хеллан. Введение в механику разрушения. – М.: Мир, 1988. – 364 с.

11 Саврук М.П. Коэффициент интенсивности напряжений в телах с трещинами. Справочник. т. 2. – Киев: Наукова думка, 1988. – 620 с.

12 Механика разрушения и прочность материалов: Справочное пособие / под ред. В.В. Панасюка. – Киев: Наукова думка, 1988-1990. Т. 1–4.

13 Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. В 2 томах. / Пер. с англ. под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – 448 с.

14 Москвичев В.В., Махутов Н.А., Черняев А.П. и др. Трещиностойкость и механические свойства конструкционных материалов. – Новосибирск: Наука, 2002. – 334 с.

15 Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова В. Л. Нелинейная механика разрушения. - Самара: Самарский университет, 2001. – 632 с.

16 Левин В.А., Морозов Е.М., Матвиенко Ю.Г. Избранные нелинейные задачи механики разрушения. – М.: Физматлит, 2004. – 408 с.

17 Матвиенко Ю.Г. Модели и критерии механики разрушения. – М.: Физматлит, 2006. – 328 с.

18 Пестриков В.М., Морозов Е.М. Механика разрушения на базе компьютерных технологий. Практикум. – Спб.: БХВ-Петербург, 2007. – 464 с.

19 Черепанов Г.И. Механика разрушения.- Ижевск: ИКИ, 2012. - 872 с.

20 Морозов Е.М., Муйземнек А.Ю., Шадский А.С. ANSYS в руках инженера: Механика разрушения. – М.: ЛЕНАНД, 2010. - 456 с.

21 Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.

22 Сиратори М., Миеси Т., Мацусита Х. Вычислительная механика разрушения. М.: Мир, 1986. – 334 с.

23 Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наукова думка, 1981. – 323 с.

24 Андрейкив А.Е. Пространственные задачи теории трещин. – Киев: Наукова думка, 1982. – 354 с.

25 Атлури С., Кобояси А., Нагасаки М. Вычислительные методы в механике разрушения – М.: Мир, 1990. – 391 с.

26 Тихомиров В.М. Определение коэффициента интенсивности напряжений в трехмерных задачах механики разрушения. // Прикладная механика и техническая физика, 2014, № 5. – С. 172-180.

27 Ju S. H., Hsu H. H. A hybrid analytic-numerical method for three-dimensional cracks // Theor. and Appl. Fract. Mech. – 2016. – 85. – P. 262-275.

28 Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.

29 Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. – М.: Высшая школа, 1985. – 392 с.

30 Расчеты машиностроительных конструкций МКЭ: Справочник / Под ред. В.И. Мяченкова. – М.: Машиностроение, 1989. – 520 с.

31 Остсемин А.А., Уткин П.Б. Напряженно-деформированное состояние коэффициент интенсивности напряжений в окрестности трещиноподобных дефектов при двухосном растяжений пластин // Прикладная механика и техническая физика. – 2014, № 6. - С. 162-172.

32 Глаголев В. В., Девятова М. В., Маркин А. А. Модель трещины поперечного сдвига. // Прикладная механика и техническая физика. – 2015. – № 4. - С. 182-192.

33 Savruk M. P., Chornen'kyiA. V. Plane Problem of the Theory of Elasticity for a Quasiorthotropic Body with Cracks // Mater. Sci. – 2015. – 51, No 3. – P. 311-321.

34 Ren Xiang, Guan Xuefei. Three dimensional crack propagation through mesh-based explicit representation for arbitrarily shaped cracks using the extended finite element method // Eng. Fract. Mech. – 2017. – 177. – P. 218-238.

35 Miao X.T., Zhou C.Y, Lv F., Li J., He X.H. An investigation of T-stresses in a plate with an inclined crack under biaxial loadings // Fatigue and Fract. Eng. Mater. and Struct. – 2017. – 40, No 3. – P. 435-447.

36 Васильев В. В., Лурье С. А. Новое решение плоской задачи о равновесной трещине // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. – 2016. – № 5. – С. 61-67.

37 Гусев А.С. Сопротивление усталости и живучесть конструкций при случайных нагрузках. – М.: Машиностроение, 1989. – 246 с.

38 Когаев В.П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени. – М.: Машинострение, 1993. – 364 с.

39 Карзов Г.П., Марголин Б.З. Швецова В.А. Физико-механическое моделирование процессов разрушения. – С.-Петербург: Политехника, 1993. – 391 с.

40 Kikuchi M., Atluri S.N., Miyamoto H. Studies of the size effects and crack growth of side grooved CT specimens // Proc. of ASTM Nat. Symp. On Fract., ASTM STP 868, 1985. – P. 251-278.

41 Khalil Gazi Md. Computation of stress intensity factors using a special finite element technique // Indian Journal of Engineering and Materials Sciences – 1999. – № 4. – P. 182-187.

42 Шлянников В. Н., Бойченко Н. В., Туманов А. В. Расчет пластического коэффициента интенсивности напряжений в пластине с поверхностной трещиной при растяжении и изгибе // Тр. Академэнерго. – 2015. – № 2. – С. 61-73.

43 Fang Xiaomin, Charalambides Panos G. A J-integral approach in characterizing the mechanics of a horizontal crack embedded in a cantilever beam under an end transverse force. // Eng. Fract. Mech. – 2017. – 169. – P. 35-53.

44 Xian-Fang Li, Ying-Fei Sun, Tian-You Fan. On stress intensity factors for an external crack of arbitrary shape // International Journal of Fracture – 1998 – 90(1). – P. 9-14.

45 Бородачев Н.М., Кольцов В.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений с помощью метода поправочных коэффициентов // Проблемы прочности. – 1992. – № 3. – С. 12-17.

46 Liu Baoliang, Zou Guangping. Research on stress intensity factors of elliptical hole in infinite body // Funct. Mater. – 2016. – 23, No 2. – P. 224-229.

47 Добровольский Д. С. Теоретическое обоснование методики оценки трещиностойкости в условиях мелких и глубоких трещин // Вестн. ИжГТУ. – 2016. – № 1. – С. 6-8.

48 Добровольский Д. С. Влияние надрезов стержней на коэффициенты интенсивности напряжений кольцевых трещин // Вестн. ИжГТУ. – 2016. – № 2. – С. 6-8.

49 Alizadeh K. J., Ghajar R. Calculation of mixed mode stress intensity factors for an elliptical subsurface crack under arbitrary normal loading // Fatigue and Fract. Eng. Mater. and Struct. – 2015. – 38, No 6. – P. 700-713.

50 Zhu Qingyu, Han Feng, Sui Mingli. Stress intensity factors and crack-surface opening displacements for two cracks emanating from a circular hole in an infinite plate // Acta aeron. etastronaut. sin. – 2016. – Vol.37, No 3. – P. 883-893.

51 Stepanova Larisa, Roslyakov Pavel. Multi-parameter description of the crack-tip stress field: Analytic determination of coefficients of crack-tip stress expansions in the vicinity of the crack tips of two finite cracks in an infinite plane medium // Int. J. Solids and Struct. - 2016. - 100-101. - P. 11-28.

52 Осипов С.Н., Лебков В.В., Зернин М.В. Описание напряженно-деформированного состояния и определение КИН гибридным МКЭ // Международная молодежная научн. конф. “XXV Гагаринские чтения”. Тез. докл. - Москва, 1999. – С. 53-54.

53 Гудков Н.А., Чернятин А.С. Расчет параметров механики разрушения на основе эвристического подхода к определению положения вершины

трещины // Вестник МГТУ имени Н.Э. Баумана. Серия машиностроения, 2008. - № 2. - С 4-16.

54 Никишков Г.П., Смирнов Ю.И. Расчет коэффициента интенсивности напряжений с использованием трехмерных конечных элементов и сгущения сетки // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1986. – № 49. – С. 64-68.

55 Fawas S.A. Stress intensity factor solutions for part-elliptical through cracks // Eng. Fract. Mesh. –1999. – 63, No 2. – P. 209-226.

56 Lan Xin, Ji Shaobo, Noda Nao-Aki, Cheng Yong. Stress intensity factor solutions for several crack problems using the proportional crack opening displacements // Eng. Fract. Mech. – 2017. – 171. – P. 35-49.

57 Ионов В.Н., Селиванов В.В. Динамика разрушения деформируемого тела. – М.: Машиностроение, 1987. – 272 с.

58 Махутов Н.А. Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность. – М.: Машиностроение, 1981. – 272 с.

59 Liu Yuanyong, Xu Fei, Ge Dongyun. Investigation of fracture mechanics parameters describing elastoplastic crack growth // Xibei gongue daxue xuebao=j. North West. Polytechn. Univ. 2000. 18, № 1.- P. 5-10.

60 Бибосинов А. Ж., Искакбаев А. И., Бекбауов Б. Е. Моделирование и исследование зоны пластичности вокруг трещины Гриффитса // 11 Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Аннотации докладов. – Казань, 2015. – С. 42.

61 Коллинз Дж. Повреждение материала в конструкциях. Анализ, предсказания, предотвращения. – М.: Мир, 1984. – 624 с.

62 Tohgo Keiichiro, Otsuka Ario, Gao Hong-Wei, Nojima Yasushi. A simple method of estimating the J-integral for a mixed mode single-edge cracked specimen subjected to bending moment and shearing force // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. – 1989. – V.55, № 519. – P. 2307-2314.

63 Yu Y., Lai M.O. Numerical Analysis for J integral of Subinterface Crack. // Fracture Mechanics. Successes and Problems: Collection of Abstracts of ICF-8. – Kiev, 1993. – P. 137.

64 Mantic V., Garcia I. G. Crack onset and growth at the fibre-matrix interface under a remote biaxial transverse load. Application of a coupled stress and energy criterion // INTERNATIONAL JOURNAL OF SOLIDS AND STRUCTURES. – 2012. – V. 49, – Issue: 17. – P. 2273-2290.

65 Экспериментальная механика / под ред. А. Кобаяси. – Москва: Мир, 1990. – Кн. 1. – 616 с.; Кн. 2. – 552 с.

66 Zhang Yonghong, Chui Xuming, He Fujun, Liu En. Study of the stress intensity factor in the case of many semi-elliptical cracks // Yingyong lixue xuebao = Chin. J. Appl. Mesh. – 2000. – No 1. – P. 150-156.

67 Федоровский Г.Д. О применении метода фотоупругости к определению коэффициента интенсивности напряжений у вершины трещины нормального отрыва // Вест. С. – Петербург. Унив. – 1999. – №1. – С. 114-117.

68 Елеонский С.И., Одинцев И.Н., Писарев В.С., Чернов А.В. Исследование процесса распространения трещины по данным измерений локального деформационного отклика. Поле действующих напряжений // Учен. зап. ЦАГИ. – 2015. – 46, № 7. – С. 55-80.

69 Adams G. G. Critical value of the generalized stress intensity factor for a crack perpendicular to an interface. // Proc. Roy. Soc. London. – 2015. – 471, No 2183. – P. 2015-2021.

70 Lin'kov A. M. Loss of stability, characteristic length, and Novozhilov-Neuber criterion in fracture mechanics // MECHANICS OF SOLIDS. – 2010. – V. 45, Issue: 6. – P. 844-855.

71 Toribio J., Ayaso F.J., Gonzalez B., Matos J.C., Vergara D., Lorenzo M. Critical stress intensity factors in steel cracked wires // Mater. And Des. – 2011. – V.32, – P. 4424-4429.

72 Бакиров Ж.Б., Бакиров М.Ж., Такишов А.А. Развитие силового критерия механики разрушения // Труды Университета, Вып. 3. – Караганда, КарГТУ. – 2013. – С. 65 – 69.

73 Ильин А.В., Никонов Ю.А., Прохоров В.Д. Метод определения критической величины J- интеграла в условиях стабильного роста трещин // Проблемы прочности. – 1992. – № 3. – С.18-25.

74 Корнев В.М., Кургузов В.Д. Достаточный критерий разрушения в случае сложного напряженного состояния при непропорциональном деформировании материала в зоне предразрушения // Прикладная механика и техническая физика. – 2010. – Том 51, №6. – С. 153-163.

75 Махутов Н.А., Алымов В.Т., Бормас В.Ю. Инженерные методы оценки и продления ресурса сложных технологических систем по критериям механики разрушения // Заводская лаборатория. – 1997. – Т. 63, – №6. – С. 45-51.

76 Цыбанов Г.В. Применение деформационного критерия к описанию роста коротких усталостных трещин // Проблемы прочности. – 2013. – № 1. – С. 43-52.

77 Hell S., Weissgraeber P., Felger J. A coupled stress and energy criterion for the assessment of crack initiation in single lap joints: A numerical approach // ENGINEERING FRACTURE MECHANICS. – 2014. –V 117. – P. 112-126.

78 Huynh Nam N., Lu Cheng, Michal Guillaume. A misorientation dependent criterion of crack opening in FCC single crystal // Conference: 15th International Conference on Advances in Materials and Processing Technologies (AMPT) Location: Wollongong, Australia, 2012. XV Book Series: Materials Science Forum, 2014. – V. 773-774. – P. 293-311.

79 Морозов Е.М. Двухкритериальные подходы в механике разрушения // Проблемы прочности. – 1985. – № 10. – С. 103-108.

80 Орыняк И.В., Торей В.М. Двухкритериальная оценка предельного состояния тела с трещиной при несимметричном нагружении // Проблемы прочности. – 1991. – № 11. – С. 32-37.

81 Тороп В.М. Обоснование двухкритериальной диаграммы оценки разрушения сосудов давления и трубопроводов с аксиальными сквозными трещинами. // Проблемы прочности. – 1992. – № 11. – С. 34-41.

82 Malikova Lucie (Sestakova), Vesely Vaclav. Application of multi-parameter fracture mechanics to study of crack propagation angle in selected mixed-mode geometry // Conference: 7th International Conference on Materials Structure and Micromechanics of Fracture (MSMF 7). Location: Brno, CZECH REPUBLIC, 2013. VII Book Series: Key Engineering Materials. – 2014. – V. 592-593. – P. 209-212.

83 Meliani M. H., Matvienko Y. G., Pluvinage G. Two-parameter fracture criterion based on notch fracture mechanics // INTERNATIONAL JOURNAL OF FRACTURE. – 2011. – V. 167, Issue: 2. – P173-182.

84 Матвиенко Ю.Г., Морозов Е.М. Взаимосвязь критериев нелинейной механики разрушения // Физико-химическая механика материалов. – 1989. – № 2. – С. 3-10.

85 Матвиенко Ю.Г. Детерминированный анализ безопасности, живучести и остаточного ресурса по критериям механики трещин // Заводская лаборатория. – 1997. – Т.63, № 6. – С. 52-58.

86 Матвиенко Ю. Г. Концепция осреднения напряжений в проблемах двухпараметрической механики разрушения // Изв. МГТУ – "МАМИ". – 2015. – № 2, ч. 4. – С. 85-90.

87 Орыняк И.В., Радченко С.А. Анализ стабильного роста трещины на основе двухкритериального подхода // Проблемы прочности. – 2001. – № 6. – С. 41-60.

88 Марголин Б.З., Костылев В.И. Моделирование вязкого роста трещин в корпусных реакторных сталях и построение J-R – кривых // Проблемы прочности. – 2002. – № 2. – С. 20-34.

89 Матвиенко Ю. Г. Развитие моделей и критериев механики разрушения на современном этапе // 5 Всероссийская конференция "Безопасность и живучесть технических систем": Материалы и доклады. Т. 2. – Красноярск, 2015. – С. 66-67.

90 ГОСТ 25506-85. Определение характеристик трещиностойкости при статическом нагружений.

91 Гиренко В.С., Дядин В.П. Корреляция характеристик трещиностойкости материала и сварных соединений с результатами стандартных механических испытаний // Автоматическая сварка. – 1990. – № 6. – С. 1-5.

92 Feddersen C.E. Evaluation and prediction of the residual Strength of center cracked tension panels // Elastic-Plastic Fracture. – ASTM STP. – 1971. 486. – P. 50-78.

93 Various authors. Fracture toughness evaluation by R curve methods // Elastic-Plastic Fracture. – ASTM STP. – 1973. 527. – P. 37-61.

94 Ray, K. K.; Patra, A.; Bhattacharjee, D. A new methodology for estimating fracture_criterion_of thin sheets // Conference: 8th International Conference on

Fracture and Damage Mechanics. Location: MALTA, 2009. VIII Book Series: Key Engineering Materials. – 2010. – V. 417-418. – P. 305-308.

95 Никишков Г.П. Зависимость вязкости разрушения от стеснения деформации в вершине трещины // Научные труды 4 Международной научной конференции "Фундаментальные исследования и инновационные технологии в машиностроении". – Москва, 2015. – С. 181-188.

96 Пустовой В.Н. Металлоконструкции грузоподъемных машин. Разрушение и прогнозирование остаточного ресурса. – М.: Транспорт, 1992. – 256 с.

97 Сварные строительные конструкции / под ред. Л.М. Лобанова – Киев: Наукова думка, 1993. – Т. 1 – Основы проектирования конструкций. – 416 с.

98 Матвиенко Ю.Г., Морозов Е.М. Расчет на прочность по критериям механики разрушения // Проблемы прочности. – 1987. – № 4. – С. 3-7.

99 Нургужин М.Р. Анализ разрушений сварных крановых металлоконструкций // Труды Университета. Вып. 2.- Караганда: КарГТУ. – 1997. – С. 71-77.

100 Schwalbe H.H. Fracture Mechanics in Practical Use Concepts, Benefits and Limitations // Fracture Mechanics. Successes and Problems: Collection of Abstracts of ICF-8. – Kiev, 1993. – P. 465.

101 Покровский А.М., Дубовицкий Е.И. Оценка трещиностойкости магистрального нефтепровода с учетом остаточных напряжений // Изв. вузов. Машиностроение. – 2017. – № 7. – С. 10-19.

102 Макаров А.П., Шевченко А.Н., Павлов А.М. Определение критической длины трещины в металлоконструкциях карьерных экскаваторов // Вестник ИрГТУ. – 2015. – № 12. – С. 57-63.

103 Матвиенко Ю.Г. Анализ допустимых размеров трещиноподобных дефектов на основе диаграмм трещиностойкости // Проблемы машиностроения и надежности машин – 2007. – № 2. – С. 110-115.

104 Матвиенко Ю.Г. Влияние двухосного нагружения на диаграммы трещиностойкости тел с трещинами и тонкими вырезами // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2006. – № 5. – С. 37-41.

105 Глаголев В. В., Маркин А. А. Модель деформирования и разрушения тел с трещиноподобным дефектом // 11 Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Аннотации докладов. – Казань, 2015. – С. 75.

106 Sevcik, M.; Hutar, P.; Nahlik, L.; et al. The effect of constraint level on a crack path // ENGINEERING FAILURE ANALYSIS. – 2013. –V. 29. – P. 83-92.

107 Лебединский С.Г. Расчетное моделирование развития усталостных трещин в стали литых деталей железнодорожных конструкций // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2018. – № 1. – С. 66-70.

108 Копельман Л.А. Сопротивление сварных узлов хрупкому разрушению. – Л.: Машиностроение, 1982. – 301 с.

109 Касаткин С. Б. Особенности хрупкого разрушения сварных соединений // Автоматическая сварка – 1993. –№ 1. –С. 25-28.

110 Куркин А.С. Жохов А.Г. Применение хрупкого и вязкого разрушения для расчета на прочность сварных конструкций // Сварочное производство. – 1995. – № 10. – С. 11-13.

111 Lei Y., Odowd N.P., Webster G.A. Расчет J – интеграла и оценка дефекта при комбинировании остаточных напряжений и механического нагружения // Int. J. Pressure Vessels and Pip. – 2000. –77, № 6. – P. 321-333.

112 Болотин В.В. Ресурс машин и конструкций. - М.: Машиностроение, 1990. – 448 с.

113 Машиностроение: Энциклопедия.– Т. 3-4: Надежность машин. / под общ. ред. В.В. Клюева. – М.: Машиностроение, 1998. – 592 с.

114 Xue Hongjun, Lu Guozhi. Оценка вероятности разрушения хрупко разрушающихся конструкций // Xibei gongue daxue xuebao=j. Northwest. Polytechn. Univ. – 2001. – 19, № 2. – P. 229-232.

115 Chuprakov, D. A.; Zhubayev, A. S. A variational approach to analyze a natural fault with hydraulic fracture based on the strain energy density criterion // THEORETICAL AND APPLIED FRACTURE MECHANICS. – 2010. – V. 53, Issue: 3. – P. 221-232.

116 Dirgantara, Tatacipta; Wicaksono, Tuppi Summa; Ahmed, Thahir; et al. Probabilistic Fracture Mechanics Analysis of Multiple Cracks in Cylindrical Pressure Vessel // Conference: 8th International Conference on Fracture and Strength of Solids (FEOFS). Location: Kuala Lumpur, MALAYSIA, 2010. VII, PTS 1 AND 2 Book Series: Key Engineering Materials. – 2011. – V. 462-463. Part: 1,2. – P. 1314-1318.

117 Krejsa, M.; Brozovsky, J.; Mikolasek, D. Using DOProC method in reliability assessment of steel elements exposed to fatigue // Conference on Dynamics of Civil Engineering and Transport Structures and Wind Engineering (DYN-WIND). Location: Trstena, SLOVAKIA, 2017. Book Series: Matec Web of Conferences Volume: 107, UNSP 00046. Published: 2017.

118 Krejsa, M.; Koubova, L.; Flodr, J. Probabilistic prediction of fatigue damage based on linear fracture mechanics // Frattura and Integrita Strutturale. – 2017. – Issue: 39. – P. 143-159.

119 Бондаренко В.М., Бондаренко С.В. Инженерные методы нелинейной теории железобетона. – М.: Стройиздат, 1982. –287 с.

120 Байков В.Н., Сигалов Э.Е. Железобетонные конструкции: Общий курс. – М.: Стройиздат. 1991. – 767 с.

121 Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. – М.: Стройиздат. 1996. – 416 с.

122 Пирадов К.А., Гузеев Е.А. Механика разрушения железобетона. – М.: НИИЖБ, 1998. – 188 с.

123 Беглов А.Д., Санжаровский Р.С. Теория расчета железобетонных конструкций на прочности и устойчивости // Современные нормы и евростандарты. – М.: Изд-во АВС, 2006. – 187 с.

124 Кодыш Э.Н., Никитин И.К., Трекин Н.Н. Расчет железобетонных конструкций из тяжелого бетона по прочности, трещиностойкости и деформациям. – М.: Изд-во АВС, 2010. – 352с.

125 Нугужинов Ж.С. Теория расчета железобетонных конструкций с повреждениями. – Караганда: Изд-во КарГТУ, 2012. – 203с.

126 Зайцев Ю.В. Механика разрушения для строителей. – М.: Высшая школа, 1991. – 288с.

127 Баранова Т.И., Гучкин И.С., Муленкова В.И. Оценка прочности и эксплуатационной пригодности железобетонных балок с нормальными трещинами // Инженерные проблемы современного железобетона. Сб. тр. – Иваново: ИИСИ, 1995. – С. 32-36.

128 Леонгардт Ф. Предварительно напряженный железобетон / Пер. с нем. В.Н. Гаранина. – М.: Стройиздат, 1983. – 172 с.

129 Байков В.Н. Напряженно-деформированное состояние железобетонных элементов на базе обобщенных экспериментальных зависимостей физико-механических характеристик бетона и арматуры // Вопросы прочности, деформативности и трещиностойкости железобетона. Сб. тр. – Ростов-на-Дону, 1980. – С. 3-11.

130 Карпенко Н.И., Мухамедиев Т.А., Сапожников М.А. К построению методики расчета стержневых элементов на основе диаграмм деформирования материалов // Совершенствование методов расчета статически неопределимых железобетонных конструкций. Сб. тр. – М.: НИИЖБ, 1987. – С. 4-24.

131 Біч П.М. Жалезабетон з пазіцый супраціулення матэрыялау. – Минск: Навука і тэхніка, 1991. – 222 с.

132 Залесов А.С. Деформационная расчетная модель железобетонных элементов при действии поперечных сил // Инженерные проблемы современного железобетона. – Иваново: ИИСИ. –1995. – С. 113-120.

133 Залесов А.С., Чистяков Е.А., Ларичева И.Ю. Деформационная расчетная модель железобетонных элементов при действии изгибающих моментов и продольных сил // Бетон и железобетон. – 1996. – №5. – С.16-18.

134 СП 52-101-2003. Бетонные и железобетонных конструкций без предварительного напряжения арматуры.

135 СНиП РК 5.03-34-2005. Бетонные и железобетонные конструкции. Общие положения.

136 EN 1992-1:2001 (Final Draft, April, 2002) Eurocode – 2: Design of Concrete Structures – Part 1:General Rules and Rules for Building. – Brussels. – 2002. – 230 p.

137 Байков В.Н., Горбатова С.В., Дмитриев З.А. Построение зависимости между напряжениями и деформациями сжатого бетона по системе нормируемых показателей // Строительство и архитектура. Изв. вузов. – 1977. – №6, – С. 15-18.

138 Карпенко Н.И., Мухамедиев Т.А. Диаграммы деформирования бетона для развития методов расчета железобетонных конструкций с учетом режимов

нагружения // Эффективные маломатериалоемкие железобетонные конструкции. Сб. тр.– М.: НИИЖБ, 1988. – С. 4-18.

139 Михайлов В.В., Емельянов М.П., Дудоладов Л.С., Митасов В.М., Некоторые предложения по описанию диаграммы деформаций бетона при загружении // Строительство и архитектура. Изв. ВУЗ. – Новосибирск, 1984. – №2. –С. 23-27.

140 Мухамедиев Т.А. К нормированию диаграммы деформирования бетона при осевом сжатии // Инженерные проблемы современного железобетона: Сб. тр.- Иваново: ИИСИ. – 1995. – С. 235-241.

141 Лазовский Д.Н. Усиление железобетонных конструкций эксплуатируемых строительных сооружений. – Новополоцк: Изд-во Полоцкого гос. ун-та, 1998. – 240 с.

142 Карпенко Н.И., Мухамедиев Т.А., Петров А.Н. Исходные и трансформированные диаграммы деформирования бетона и арматуры // Напряженно-деформированное состояние бетонных и железобетонных конструкций. Сб. тр. – М.: НИИЖБ, 1986. – С. 11-18.

143 Роговой С.И. К уточнению некоторых определений и характерных точек полной диаграммы деформирования бетона при сжатии // Строительство и архитектура. Известия вузов ПНТУ им. Ю. Кондратюка. – Новосибирск, – 2000. – №11. – С. 24-31.

144 Узун И.А. Трансформирование диаграмм деформирования бетона при сжатии // Бетон и железобетон. – 1991. – № 11. – С. 7-12.

145 Чайка В.П. Характеристики диаграмм неоднородного сжатия бетона // Бетон и железобетон. – 1994. – № 1. – С. 18-23.

146 Городецкий А.С., Евзеров И.Д. Компьютерные модели конструкций. – Киев: Факт, 2005. – 344 с.

147 Верюжский Ю.В., Колчунов В.Н., Барабаш М.С.,Гензерский Ю.В. Компьютерные технологии проектирования железобетонных конструкций. Учебное пособие. – Киев: НАУ, 2006. – 808 с.

148 Водопьянов Р.Ю. Программный комплекс ЛИРА-САПР 2012. Учебное пособие / Р.Ю. Водопьянов, Ю.В. Гензерский, В.П. Титок, А.Е. Артамонова. – К. – М.: Электронное издание. 2012. – 208 с.

149 Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. – М.: Стройиздат, 1974. – 316 с.

150 Пак А.А., Трапезников Л.П., Шерстобитова Т.П., Яковлева Э.Н. Зависимость критического значения коэффициента интенсивности напряжений бетона от длины трещины // Изв. ВНИИГ. – 1980. – Т. 136. – С. 11-114.

151 Трапезников Л.П. Температурная трещиностойкость массивных бетонных сооружений. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 271 с.

152 Garcia-Alvarez, Victor O.; Gettu, Ravindra; Carol, Ignacio. Analysis of mixed-mode fracture in concrete using interface elements and a cohesive crack model. // SADHANA-ACADEMY PROCEEDINGS IN ENGINEERING SCIENCES. – 2012. – V. 37, Issue: 1. – P. 187-205.

153 Клюева Н.В., Колчунов В.И., Яковенко Н.А. Проблемные задачи развития гипотез механики разрушения применительно к расчету железобетонных конструкций // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. – 2014. – № 3. – С. 41 - 45.

154 Уткин В.С., Карпушова К.А.. Расчет надежности железобетонной балки с нормальной трещиной в растянутой зоне бетона по критерию ее длины // Строительство: наука и образование. – 2017. – Том 7. – Выпуск 2(23).

155 Карпенко Н.И., Карпенко С.Н. О построении более совершенной модели деформировании железобетона с трещинами при плоском напряженном состоянии // II Всероссийская (Международная) конференция по бетону и железобетону «Бетон и железобетон - пути развития». – М. – 2005. – С. 431-444.

156 Коргин А.В., ЗейдКилани Л.З., Ермаков А.А. Учет трещиноподобных дефектов при мониторинге строительных конструкций // Вестник МГСУ. – 2013. – №12.– С. 77-83.

157 Тамразян А.А., Орлова М.М. Конечно-элементное исследование напряженно-деформированного состояния железобетонных балок с нормальными трещинами // Научное обозрение. – 2016. – №6. – С. 8-11.

158 Чирков В.П., Зенин С.А. Вероятностный расчет ширины раскрытия нормальных трещин // Бетон и железобетон. – 2002. – №6. – С. 24 - 27.

159 Бондаренко С.В., Санжаровский Р.С. Усиление железобетонных конструкций при реконструкции зданий. – М.: Стройиздат, 1990. – 351 с.

160 Гуща Ю.П. Исследование ширины раскрытия нормальных трещин.// Прочность и жесткость железобетонных конструкций. Тр. НИИЖБ./ под ред. С.А. Дмитриева и С.М. Крылова. – М.: НИИЖБ, 1971. – 97 с.

161 Истомин А.Д. Прогиб и ширина раскрытия трещин железобетонной балки по отечественным нормам и еврокоду 2 // Строительство и реконструкция. – 2018. – №1 (75). – С. 31 - 37.

162 Баширов Х.З., Дородных А.А., Колчунов В.И. Ширина раскрытия наклонных трещин третьего типа в составных железобетонных конструкциях. // Строительство и реконструкция. – 2012. – №6. – С. 3-7.

163 Шавыкина Е.В. Анализ результатов экспериментальных исследований ширины раскрытия трещин внецентренно сжатых железобетонных конструкций // Известия Орловского государственного технического университета. Серия: строительство и транспорт. – 2009. – №3. – С. 51-55.

164 Уткин В.С., Соловьев С.А. Определение остаточной несущей способности и надежности железобетонных балок по критерию ширины раскрытия трещин // Бетон и железобетон. – 2016. – №1. – С. 20-25.

165 Уткин В.С., Соловьев С.А. Определение несущей способности железобетонных балок на стадии эксплуатации по критерию ширины раскрытия трещин // Справочник. Инженерный журнал. – 2016. – №3. – С. 18-22.

166 Kwan A.K.H., Ma, F.J. Crack width analysis of reinforced concrete under direct tension by finite element method and crack queuing algorithm // Engineering Structures. – 2016. – Vol. 126. –P. 618-627.

167 Ma F.J., Kwan A.K.H. Crack width analysis of reinforced concrete members under flexure by finite element method and crack queuing algorithm. // Engineering Structures. – 2015. – Vol. 105. – P. 209-219.

168 Oliver-Leblond C., Delaplace A., Ragueneau, F. Modelling of three-dimensional crack patterns in deep reinforced concrete structures // Engineering Structures. – 2015. – Vol. 83. – P. 176-186.

169 Крыгина А.М., Чернов К.М., Баширов Х.З. Прочность железобетонных конструкций по наклонным трещинам первого и второго типов // Промышленное и гражданское строительство. – 2013. – №2. – С. 16-18.

170 Баширов Х.З, Чернов К.М. Разрушение железобетонных составных конструкций от потери сцепления в зоне заанкеривания по наклонным трещинам третьего типа // Строительная механика и расчет сооружений. – 2013. – №1(246). – С. 2 - 6.

171 Клюева Н.В., Колчунов В.И., Яковенко Н.А. К построению расчетной модели раскрытия наклонных трещин в составных железобетонных конструкциях // Строительная механика и расчет сооружений. – 2014. – №1. – С. 13-17.

172 Рудный И.А. Расчет образования и развития трещин в центрально растянутых железобетонных элементах с участками нарушенного сцепления арматуры с бетоном // Вестник гражданских инженеров. – 2014. – №6. – С. 64-69.

173 Hua Zhu. Crack formation of steel reinforced concrete structure under stress in construction period // Frattura ed Integrit à Strutturale. – 2016. – No36. – P. 191-200.

174 Митасов В.М., Логунова М.А., Стаценко Н.В. Новые подходы к решению задач деформирования железобетонных конструкций с трещинами // Известия вузов. Строительство. – 2007. – № 1. – С. 77-82.

175 Албаут Г.Н., Митасов В. М., Пичкурова Н.С., Табанюхова М.В. Модельное исследование влияния организованных трещин на напряженное состояние балок // Известия вузов. Строительство. – 2009. – № 6. – С. 119-127.

176 Чхум А., Курбонов А.М., Саметов Ф.К. Влияние организованных трещин в растянутой зоне железобетонной балки при статических кратковременных нагрузках // Вестник СибАДИ. – 2017. –№6. – С.132-139.

177 Баширов Х.З., Клюева Н.В., Дородных А.А. Основные результаты экспериментальных исследований ширины раскрытия трещин железобетонных составных конструкций по наклонным сечениям // Научный вестник Воронежского ГАСУ. Строительство и архитектура. – 2013. – №2. – С.18-26.

178 Тамразян А.А., Орлова М.М. Экспериментальные исследования напряженно-деформированного состояния железобетонных изгибаемых элементов с трещинами // Вестник ТГСАУ. – 2015. – №6 (53). – С. 98-105.

179 Орлова М.М. Напряженно-деформированное состояние железобетонных изгибаемых балок с начальными трещинами // Современные проблемы расчета железобетонных конструкций, зданий и сооружений на аварийные воздействия. – 2016. – С. 303-309.

180 Михайлова Н.С. Экспериментальные исследования железобетонных балок без трещин и заранее намеченной трещины // Известия вузов. – 2007. – №4. – С. 110-113.

181 Fantilli A.P., Chiaia B. Golden Ratio in the Crack Pattern of Reinforced Concrete Structures // Journal of Engineering Mechanics. – 2013. – Vol. 139. – P. 1178-1184.

182 Bykov A.A., Matveenko V.P., Shardakov I.N., Shestakov A.P. Shock wave method for monitoring crack repair processes in reinforced concrete structures // Mechanics of Solids. – 2017. – Vol. 52. – P. 378-383.

183 Кодыш Э.Н., Трекин Н.Н., Трекин Д.Н. Численные исследования прочности, трещиностойкости и деформаций изгибаемых и внецентренно сжатых элементов // Строительные материалы, оборудование, технологии XXI века. – 2014. – № 11 (190). – С. 33-35.

184 Ma F.J., Kwan A.K.H. Finite element analysis of concrete shrinkage cracks // Advances in Structural Engineering. – 2018. –Vol. 21. – P. 1454-1468.

185 Rossi P., Daviau-Desnoyers D., Tailhan J.L. Analysis of cracking in steel fibre-reinforced concrete (SFRC) structures in bending using probabilistic modeling // Structural Concrete. – 2015. – Vol. 16. – P. 381-388.

186 Перельмутер А.В. Избранные проблемы надежности и безопасности строительных конструкций. – М.: АСВ, 2007. –256 с.

187 Райзер В.Д. Теория надежности сооружений. – М.: АСВ, 2010. – 384с.

188 Уткин В. С., Карпушова К. А. Расчет надежности железобетонных балок по критерию прочности бетона в сечении с нормальной трещиной // Экология и строительство. – 2016. – № 4. – С. 4-8.

189 Уткин В.С., Соловьев С.А. Расчет надежности железобетонной балки по критерию длины трещины // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2016. – №5. – С. 23-33.

190 Уткин В. С., Карпушова К. А. Расчет надежности железобетонных элементов по критерию прочности рабочей арматуры в сечении с нормальной

трещиной // Строительная механика и расчет сооружений. – 2017. –№2. – С. 30-38.

191 СНиП 2.03.01- 84*. Бетонные и железобетонные конструкции.

192 Филатов В.Б. Влияние эксплуатационных повреждений, снижающих сцепление арматуры с бетоном, на прочность изгибаемых железобетонных конструкций: дисс. на соискание ученой степени канд. техн. наук: 05.23.01. – М., 1989. – 251 с.

193 Дмитриев С.А., Калатуров Б.А. Расчет предварительно-напряженных железобетонных конструкций. – М.: Стройиздат, 1965. – 508 с.

194 Вайсфельд А.А. Исследование напряженно-деформированного состояния нормальных сечений изгибаемых железобетонных элементов при частичном или полном отсутствии сцепления арматуры с бетоном: автореферат дисс. на соискание ученой степени канд. техн. наук: 05.23.01. – Л.; 1982. – 22 с.

195 Залесов А.С., Фигоровский В.В. Практический метод расчета железобетонных конструкций по деформациям. – М.: Стройиздат, 1976. – 100 с.

196 Прокопович А.А., Филатов В.Б. Оценка влияния нарушения сцепления арматуры с бетоном на прочность нормальных сечений эксплуатируемых конструкций // Повышение качества и эффективности применения бетона и железобетонных изделий и конструкций. – М.: Госстрой СССР, 1988. – С. 55-59.

197 Холмянский М.М. Контакт арматуры с бетоном. – М.: Стройиздат, 1981. – 182 с.

198 Каплун А.Б., Морозов Е.М., Олферьева М.А. ANSYS в руках инженера. Практическое руководство. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 272 с.

199 Нургужин М.Р., Даненова Г.Т. Инженерные расчеты в ANSYS: Сборник примеров. – Караганда: Изд-во КарГТУ, 2006. – 319 с.

200 Конюхов А.В. Основы анализа конструкций в ANSYS. – Казань: Казанский государственный университет, 2001. – 102 с.

201 Басов К.А. ANSYS: Справочник пользователя. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 640 с.

202 Асатурян В.И. Теория планирования эксперимента – М.: Радио и связь, 1983. – 248 с.

203 Ермеков М.А. Махов А.А. Статистико-детерминированный метод построения многомерных моделей с использованием ЭВМ. – Караганда: КарГТУ, 1988. – 96 с.

204 Ермеков М.А. Махов А.А. Выбор типа эмпирических уравнений и построение многофакторных связей с использованием ЭВМ. – Караганда: КарГТУ, 1984. – 82 с.

205 Нугужинов Ж.С., Бакиров Ж.Б., Хабидолда О., Курохтина И.Н. Определение и учет предварительных напряжений в железобетонной балке // Известия высших учебных заведений. – Новосибирск, 2019. – №5 (725). – С. 18-29.

206 Бакиров Ж.Б., Нугужинов Ж.С., Хабидолда О., Доненбаев Б.С., Жолмагамбетов С.Р. Регрессионные зависимости для определения

предварительных напряжений в железобетонной балке // Труды университета. – Раздел 4. Строительство. Транспорт. – Караганда: КарГТУ, 2019. – №2 (75). – С. 79-83.

207 Хабидолда О. Определение предельного момента по образованию трещины // Труды Международной научно-практической конференции «Интеграция науки, образования и производства-основа реализации Плана нации», (14-15 июня 2019 г.) – КарГТУ. – Караганда, – Часть 4. – С. 357-359.

208 Nuguzhinov Zh., Vatin N., Bakirov Zh., Khabidolda O., Zholmagambetov S., Kurokhtina I. Stress-strain state of bending reinforced beams with cracks // Magazine of Civil Engineering. – 2020. – 97(5). Article – No.9701. DOI: 10.18720/MCE.97.1

209 Бакиров М.Ж. Совершенствование автоматизированного расчета и оценки прочности тел с трещиноподобными дефектами: дис…. канд. техн. наук: 01.02.04: КарГТУ. – Караганда, 2006. – 128 с.

210 Бакиров М.Ж., Михайлов В.Ф., Хабидолда О. Коэффициент интенсивности напряжений в прямоугольных пластинах с трещинами // Труды университета. – Раздел 4. Строительство. Транспорт. – Караганда: КарГТУ, 2019. – №3 (76). – С. 94-99.

211 Khabidolda O., Nuguzhinov Zh., Vatin N., Bakirov Zh., Zholmagambetov S. Determining stress intensity factor in bending reinforced Concrete beams // Bulletin of the Karaganda University-Mathematics. – 2019. – Volume 92. – Issue 4. – Pp. 139-147.

212 Бакиров Ж.Б., Нугужинов Ж.С., Хабидолда О. Определение коэффициента интенсивности напряжений в изгибаемых железобетонных балках // Материалы международной научной конференции «Теоретические и прикладные вопросы математики, механики и информатики» (12-13 июня 2019 г.) – КарГУ. – Караганда, 2019. – С. 174-175.

213 Nuguzhinov Zh., Vatin N., Bakirov Zh., Khabidolda O., Kurokhtin Yu., Nuguzhinova A. Assessment of Bending Reinforced Concrete Beams Crack Resistance // 2nd International Conference on Civil Engineering and Architecture, ICCEA 2019; Seoul; South Korea, (21-23 September). IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2019. – Volume 690. – Issue 1. – No 012002.

214 Бакиров М.Ж. Двухпараметрический деформационный критерий разрушения // Труды Международной научной конференции “Наука и образование – ведущий фактор стратегии “Казахстан 2030”. – Караганда, 2007. –С. 234 – 236.

215 Иванова В.С. Синергетика: Прочность и разрушение металлических материалов. – М.: Наука, 1992 – 160 с.

216 Серенсен С.В., Когаев В. П., Шнейдерович Р.М. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. Справочник. – Москва: Машиностроение, 1975. – 488 с.

217 Phool R., Macdonald K.A., Brown P.A. Correlation between fracture toughness and Charpy impact energy // 1993, № 10. – P. 16-20.

218 Вершинский А.В., Нургужин М.Р., Базарбаев С.С. Определение объемных остаточных напряжений и деформаций в сварных узлах крановых металлоконструкций // Труды МВТУ. – 1985. – № 438. – С. 97-113.

219 Бондаренко В.М., Колчунов В.И. Расчетные модели силового сопротивления железобетона. – М.: АСВ, 2004. – 472 с.

220 Верюжский Ю.В., Колчунов В.И. Методы механики железобетона. – Курск: Изд-во НАУ, 2005. – 653 с.